Sadržaj

Predgovor 5

Glava 1. Vektori u $\mathbb{R}^n$ 7
1. Definicija. Operacije nad vektorima. Ugao. 7
2. Zadaci. 10

Glava 2. Sistemi linearnih jednačina 17
1. Definicija. Elementarne transformacije vrsta. Gausov metod. Gaus-Žordanov metod. 17
2. Zadaci. 18

Glava 3. Matrice 35
1. Definicija. Operacije. Inverzna matrica. Matrične jednačine. 35
2. Zadaci. 40

Glava 4. Vektorski prostori 59
1. Definicija. Potprostori. Linearna nezavisnost. Homomorfizmi. 59
2. Zadaci. 65

Glava 5. Vektorski prostori sa skalarnim proizvodom 109
1. Definicija. Ortogonalni komplement. Ortonormirani skupovi. Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije 109
2. Zadaci. 111

Glava 6. Determinante 119
1. Definicija. Laplasov razvoj. Elementarne transformacije vrsta i kolona. Kombinovani metod. 119
2. Zadaci. 121

Glava 7. Analitička geometrija 135
1. Vektori u $\mathbb{R}^3$. Skalarni, vektorski i mešoviti proizvod vektora. 135
2. Jednačina ravni u $\mathbb{R}^3$. 145
3. Jednačine pravih u $\mathbb{R}^3$. 152
4. Položaji pravih i ravni. 160
5. Zadaci za vežbu. 172

Glava 8. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori 193
1. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori. 193
2. Dijagonalizacija. 203

3. Ortogonalna dijagonalizacija. 216
4. Zadaci za vežbu. 217

Literatura 229

Predgovor

Zbirka je namenjena studentima Računarskog fakulteta i prati sadržaj kursa Linearna algebra i analitička geometrija. Sadrži zadatke koji su rađeni na vežbama, neke primere sa predavanja, kao i zadatke sa kolokvijuma i ispita. Sastoji se od osam poglavlja: Vektori, Sistemi linearnih jednačina, Matrice, Vektorski prostori, Vektorski prostori sa skalarnim proizvodom, Determinante, Analitička geometrija i Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori. Svako poglavlje sadrži kratak teorijski uvod, zatim zadatke sa kompletnim rešenjima, zadatke sa kratkim uputstvima za rešavanje i izvestan broj nerešenih zadataka. Poglavlje (3) uradila je Silvija Subotić, poglavlja (2) i (5) Marija Jerotijević, poglavlja (1), (7) i (8) Milanka Gardašević-Filipović i poglavlja (4) i (6) Jelena Jovanović.

Nadamo se da će zbirka biti od pomoći pri savladavanju kursa. Unapred smo zahvalne za sve komentare i korekcije grešaka.

U Beogradu, maj 2024.

Autori

GLAVA 1

Vektori u $\mathbb{R}^n$

1. Definicija. Operacije nad vektorima. Ugao.

Vektori su klase ekvivalencije na skupu uređenih parova tačaka iz $\mathbb{R}^n$ za $n \in \mathbb{N}$, u odnosu na relaciju ekvivalencije ρ definisanu sa

$$(A,B)\rho(C,D) \iff \text{duž } AB \text{ je paralelna, iste dužine i isto orijentisana kao duž } CD.$$

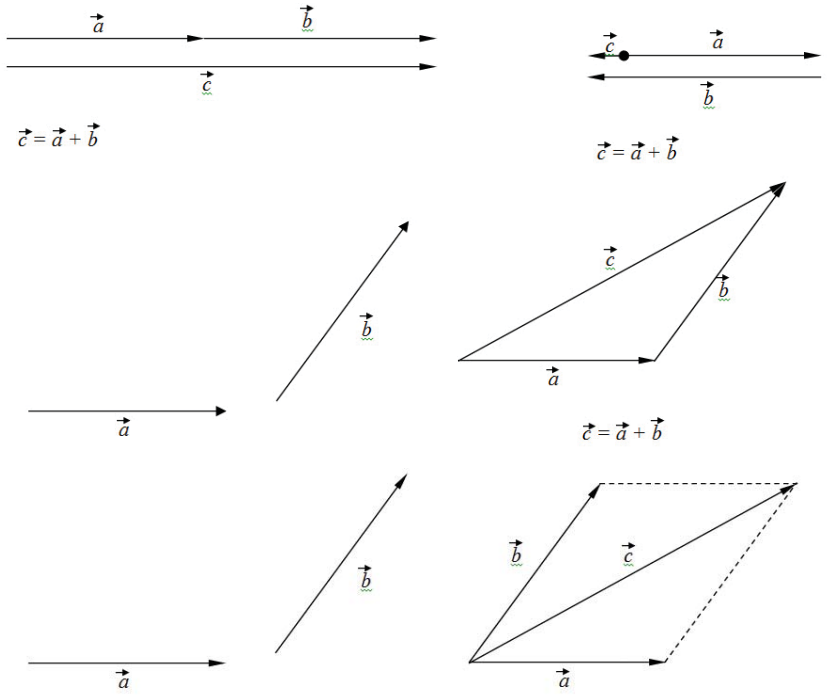
Vektor je, dakle, određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom. Skup svih vektora iz $\mathbb{R}^n$ za $n \in \mathbb{N}$ označavaćemo sa V. Vektor čiji je predstavnik (A,B) označavaćemo sa $\overrightarrow{AB}$ ili kraće sa $\vec{a}$. A je početna tačka vektora $\overrightarrow{AB}$, a B je njegova krajnja tačka. Intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$ je merni broj dužine duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$ ili $||\overrightarrow{AB}||$. Pravac vektora $\overrightarrow{AB}$ je određen tačkama A i B. Smer vektora $\overrightarrow{AB}$ je od tačke A ka tački B. Vektor $\overrightarrow{AB}$ je pomeraj od tačke A do tačke B.

Dakle, vektor je klasa ekvivalencije usmerenih duži. Kao glavnog predstavnika, najčešće uzimamo vektor čija je početna tačka u koordinatnom početku.

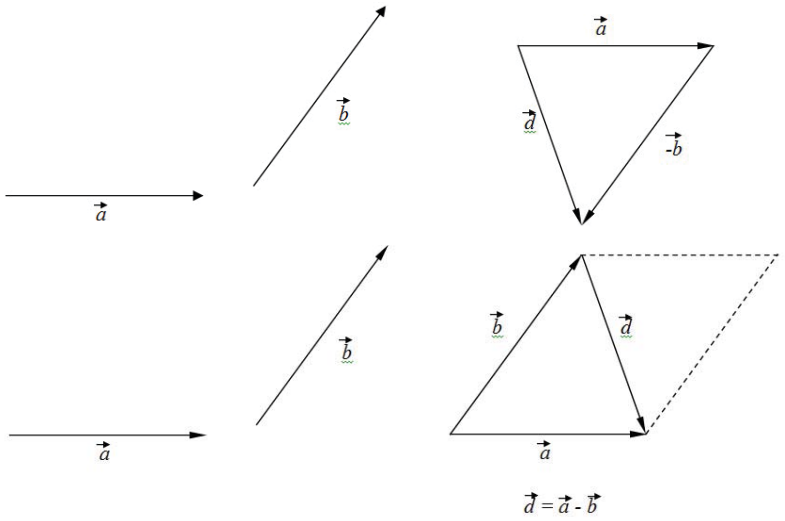
Vektor čiji je intenzitet jednak jedan naziva se jedinični vektor. Vektor kod kojeg je $A = B$ je nula vektor i označava se sa $\vec{0}$. Intenzitet nula vektora je 0, a pravac i smer se ne definišu. Vektor koji ima isti pravac i intenzitet kao vektor $\overrightarrow{AB}$, a suprotan smer, je vektor $\overrightarrow{BA}$ i naziva se suprotan vektor vektora $\overrightarrow{AB}$.

U skupu V definišemo operacije sabiranja i oduzimanja vektora na sledeći način: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$, gde je $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ (Slika 1 za $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{CD}$) i $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB}$, gde je $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ (Slika 2 za $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{CD}$). Množenje vektora $\vec{a} \in V$ realnim brojem $k \in \mathbb{R}$ (skalarom), u oznaci $k \cdot \vec{a}$, kao rezultat daje nula vektor $\vec{0}$ ako je $\vec{a} = 0$ ili $k = 0$, a inače vektor koji ima isti pravac kao vektor $\vec{a}$, intenzitet $|k \cdot ||\vec{a}||$ i isti smer kao i vektor $\vec{a}$ ako je $k > 0$, a suprotan ako je $k < 0$ (Slika 3[1]) .

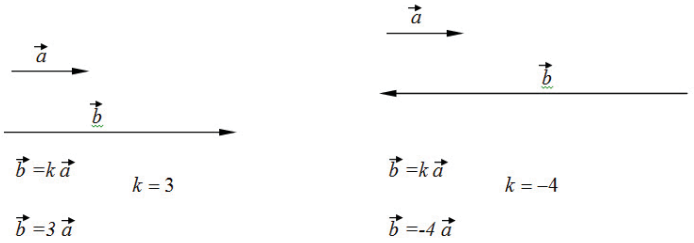
[1]Slike 1,2 i 3 su preuzete sa https://fizis.rs



Slika 1



Slika 2



Slika 3

U skupu vektora definiše se skalarni proizvod dva vektora $\vec{u}, \vec{v} \in V$, u oznaci $\vec{u} \cdot \vec{v}$, i jednak je $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\alpha$, gde je α ugao između vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Ugao između dva vektora je $\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$. Skalarni proizvod dva nenula vektora jednak je nuli ako i samo ako su ti vektori ortogonalni (ugao između njih je prav). Ukoliko je skalarni proizvod dva nenula vektora pozitivan, odnosno negativan, onda je ugao između tih vektora oštar, odnosno tup.

U prostoru $\mathbb{R}^n$ položaj svake tačke jedinstveno je određen na osnovu njenih koordinata. Neka su $A, B \in \mathbb{R}^n$, $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ je $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}$. Brojeve $v_1 = b_1 - a_1, v_2 = b_2 - a_2, \ldots, v_n = b_n - a_n$ nazivamo koordinate vektora $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Kanonska pozicija vektora $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ je ona u kojoj je koordinatni početak njegova početna tačka. Svakoj tački $A \in \mathbb{R}^n$, $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pridružuje se njen vektor položaja ili njen radijus vektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Neka su $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ dva vektora u $\mathbb{R}^n$. Kažemo da su vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jednaki, i pišemo $\vec{u} = \vec{v}$ ako i samo ako imaju iste koordinate, tj. ako i samo ako je $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$. Zbir vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ je vektor

$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$. Razlika vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ je vektor $\vec{u}-\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1-v_1 \\ u_2-v_2 \\ \vdots \\ u_n-v_n \end{pmatrix}$.

Proizvod vektora $\vec{u}$ i realnog broja $k \in \mathbb{R}$ je vektor $k \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} k \cdot u_1 \\ k \cdot u_2 \\ \vdots \\ k \cdot u_n \end{pmatrix}$.

Skalarni proizvod vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ je $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \dots u_n \cdot v_n$, odnosno $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\alpha$, odakle sledi da je $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2 = u_1^2 + u_2^2 \dots u_n^2$, pa je intenzitet vektora $\vec{u}$ upravo $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 \dots u_n^2}$.

Nula vektor je vektor čije su sve koordinate jednake nuli. Jedinični vektor je vektor čiji je intenzitet jednak jedinici. Svakom nenula vektoru $\vec{u}$ može se pridružiti njegov ort, odnosno jedinični vektor koji ima isti pravac i smer kao vektor $\vec{u}$, u oznaci $ort\vec{u}$. Na osnovu definicije skalarnog proizvoda nije teško zaključiti da je $ort\vec{u} = \frac{1}{||\vec{u}||} \cdot \vec{u}$. Koordinate orta vektora su vrednosti kosinusa uglova koje taj vektor gradi sa koordinatnim osama.

2. Zadaci.

Zadatak 1. *Izračunati zbir vektora* $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Rešenje. Na osnovu definicije operacije sabiranja vektora u $\mathbb{R}^n$ sledi da je

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

□

Zadatak 2. *Izračunati razliku vektora* $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Rešenje. Na osnovu definicije operacije oduzimanja vektora u $\mathbb{R}^n$ sledi da je

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Zadatak 3. *Dati su vektori* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Izračunati* $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

Rešenje. Na osnovu definicija operacija oduzimanja vektora u $\mathbb{R}^n$ i množenja vektora realnim brojem sledi da je

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

□

Zadatak 4. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Rešenje. Na osnovu definicije skalarnog proizvoda vektora u $\mathbb{R}^n$ sledi da je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4.$$

□

Zadatak 5. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rešenje. Na osnovu definicije skalarnog proizvoda vektora u $\mathbb{R}^n$ sledi da je

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + +3 \cdot 4 = 8.$$

□

Zadatak 6. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rešenje. Na osnovu definicije skalarnog proizvoda vektora u $\mathbb{R}^n$ sledi da je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = 1.$$

□

Zadatak 7. *Izračunati intenzitet (normu) vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Rešenje. Na osnovu definicije intenziteta vektora u $\mathbb{R}^n$ sledi da je

$$||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 0^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{55}.$$

□

Zadatak 8. *Izračunati ugao između vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rešenje. Neka je α ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Na osnovu definicije ugla između dva vektora u $\mathbb{R}^n$ sledi da je
$\alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||} = \arccos \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 0$, pa je $\alpha = \frac{\pi}{2}$. □

Zadatak 9. *Dati su vektori* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Izračunati ugao između vektora* $2\vec{a} - \vec{b}$ *i* $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Rešenje. Neka je α ugao između vektora $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ i i $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Na osnovu definicije ugla između dva vektora u $\mathbb{R}^n$ sledi da je $\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$.

Najpre ćemo, na osnovu definicije oduzimanja i sabiranja dva vektora u $\mathbb{R}^n$, kao i na osnovu definicije množenja vektora u $\mathbb{R}^n$ realnim brojem, izračunati koordinate vektora $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ i i $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Na osnovu definicije skalarnog proizvoda dva vektora u $\mathbb{R}^n$, kao i na osnovu definicije intenziteta vektora u $\mathbb{R}^n$, sledi da je

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\1\\0\end{pmatrix}=0\cdot 5+3\cdot 4+1\cdot 1+10\cdot 0=12+13=13,$$

$$||\vec{u}||=\sqrt{0^2+3^2+(1)^2+10^2}=\sqrt{110},$$

$$||\vec{v}||=\sqrt{5^2+4^2+1^2+0^2}=\sqrt{42},$$

pa je $\alpha=\arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}=\arccos\frac{13}{\sqrt{110}\cdot\sqrt{42}}=\arccos\frac{13}{2\cdot\sqrt{1155}}$ □

Zadatak 10. *Izračunati uglove koje vektor* $\bar{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ *gradi sa koordinatnim osama.*

Rešenje. Kosinusi uglova koje vektor $\bar{a}$ gradi sa koordinatnim osama su koordinate jediničnog vektora pridruženog datom vektoru $\vec{a}$, tj. vektora $ort\vec{a}=\frac{1}{||\vec{a}||}\cdot\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, pa je $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, gde smo sa α i β označili uglove koje vektor $\vec{a}$ gradi redom sa apscisnom i ordinatnom osom, odakle sledi da je $\alpha=\frac{\pi}{4}$ i $\beta=\frac{3\pi}{4}$. □

2.1. Zadaci za vežbu.

Zadatak 11. *Izračunati zbir vektora* $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\9\\10\end{pmatrix}$ *i* $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}$.

Rezultat. $\vec{v}+\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\\12\\6\end{pmatrix}$ □

Zadatak 12. *Izračunati razliku vektora* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Rešenje. $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ □

Zadatak 13. *Dati su vektori* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Izračunati* $5\vec{u} - 3\vec{v}$.

Rezultat. $5\vec{u} - 3\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \\ 19 \\ 15 \end{pmatrix}$ □

Zadatak 14. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ □

Zadatak 15. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$ □

Zadatak 16. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ □

Zadatak 17. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -9$ □

Zadatak 18. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$ □

Zadatak 19. *Izračunati skalarni proizvod vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -9$ □

Zadatak 20. *Izračunati intenzitet (normu) vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $||\vec{a}|| = \sqrt{30}$ □

Zadatak 21. *Izračunati ugao između vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\frac{\pi}{2}$ □

Zadatak 22. *Izračunati ugao između vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\frac{\pi}{4}$ □

Zadatak 23. *Izračunati ugao između vektora* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Rezultat. $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$ □

Zadatak 24. *Dati su vektori* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Izračunati ugao između vektora* $\vec{a} - 2\vec{b}$ *i* $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Rezultat. $\arccos \frac{1}{10 \cdot \sqrt{11}}$ □

Zadatak 25. *Izračunati uglove koje vektor* $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *gradi sa koordinatnim osama.*

Rešenje. $\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}$ □

GLAVA 2

Sistemi linearnih jednačina

1. Definicija. Elementarne transformacije vrsta. Gausov metod. Gaus-Žordanov metod.

Linearna jednačina sa n promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jednačina

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ realne konstante i nisu sve konstante $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jednake nuli. Ako je $b = 0$, linearna jednačina je homogena.

Sistem linearnih jednačina je konačan skup linearnih jednačina. Sistem m jednačina sa n nepoznatih je

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Ako je $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, sistem (1) je homogen.

Uređena n-torka $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ je rešenje sistema (1) ako se zamenom

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

u jednačinama sistema (1) dobija m tačnih jednakosti.

Linearan sistem je konzistentan (saglasan, neprotivrečan) ako ima bar jedno rešenje. Sistem je nekonzistentan (nesaglasan, protivrečan) ako nema rešenja. Ako je sistem saglasan, on može imati jedno rešenje ili beskonačno mnogo rešenja. Homogen sistem je uvek konzistentan.

Gausov metod sastoji se u primeni određenih operacija na jednačine sistema pri kojima skup rešenja sistema ostaje isti, tj. pri kojima se dobija sistem ekvivalentan početnom, a jednostavniji za rešavanje. Te operacije su:

1) množenje jednačine konstantom različitom od nule,
2) promena redosleda jednačina,
3) množenje jednačine konstantom i dodavanje drugoj jednačini.

Proširena matrica sistema (1) je matrica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Prethodno opisanim operacijama nad jednačinama sistema odgovaraju sledeće operacije nad vrstama matrice (nazivamo ih i elementarnim transformacijama vrsta):

1) množenje vrste konstantom različitom od nule,
2) promena redosleda vrsta,
3) množenje vrste konstantom i dodavanje drugoj vrsti.

Proširena matrica sistema je u redukovanoj ešalon formi ako zadovoljava sledeće uslove:

(1) Ako se vrsta ne sastoji samo od nula, prvi nenula broj u vrsti je 1. Tu jedinicu nazivamo vodećom.
(2) Ako postoje vrste koje se sastoje samo od nula, one su grupisane na dnu matrice.
(3) Ako se dve susedne vrste ne sastoje samo od nula, vodeća jedinica donje vrste je desno od vodeće jedinice gornje vrste.
(4) Svaka kolona koja sadrži vodeću jedinicu ima sve ostale nule.

Ako matrica sistema zadovoljava samo prva tri uslova, kažemo da je u ešalon formi. Promenljive koje ne odgovaraju vodećim jedinicama su slobodne promenljive.

Rezultat primene Gausovog metoda je matrica u ešalon formi, a Gaus-Žordanovog metoda matrica u redukovanoj ešalon formi.

2. Zadaci.

2.1. Gausov metod.

Zadatak 1. *Rešiti sistem linearnih jednačina:*

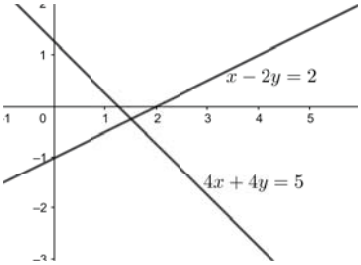
$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 4x + 4y &= 5. \end{aligned}$$

Rešenje. Množenjem prve jednačine brojem -4 i dodavanjem drugoj dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 12y &= -3. \end{aligned}$$

Odavde vidimo da je $y = -\frac{1}{4}$, a $x = 2 + 2y = \frac{3}{2}$. Dakle, sistem ima jedno rešenje $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. □

Napomena. Svaka od jednačina prethodnog sistema predstavlja jednačinu prave u Dekartovom koordinatnom sistemu. Presek dve prave je u ovom slučaju jedna tačka.



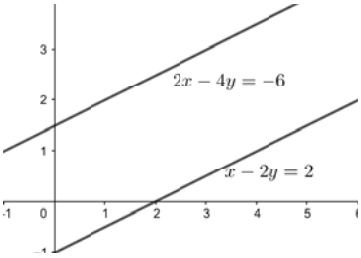
Zadatak 2. *Rešiti sistem linearnih jednačina:*

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 2x - 4y &= -6. \end{aligned}$$

Rešenje. Množenjem prve jednačine brojem -2 i dodavanjem drugoj dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 0 &= -10. \end{aligned}$$

Dakle, sistem nema rešenja. □



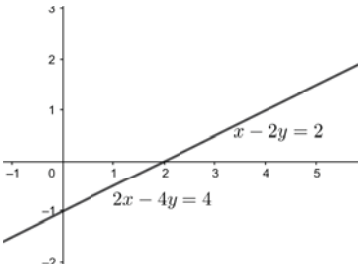
Zadatak 3. *Rešiti sistem linearnih jednačina:*

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 2x - 4y &= 4. \end{aligned}$$

Rešenje. Množenjem prve jednačine brojem -2 i dodavanjem drugoj dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Promenljiva y je slobodna. Dakle, beskonačan skup rešenja je $\mathcal{R} = \{(2t + 2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. □



Zadatak 4. *Rešiti sistem linearnih jednačina:*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ -x - 2y + 3z &= 1 \\ 3x - 7y + 4z &= 10. \end{aligned}$$

Rešenje. Proširena matrica sistema je

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right].$$

S leve strane ćemo rešavati sistem operacijama nad jednačinama, a s desne odgovarajućim transformacijama vrsta proširene matrice sistema.

Dodavanjem prve jednačine drugoj i dodavanjem prve jednačine pomnožene brojem -3 trećoj jednačini dobijamo sledeći ekvivalentan sistem.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ -y + 5z &= 9 \\ -10y - 2z &= -14. \end{aligned}$$

Prvu vrstu dodajemo drugoj. Prvu vrstu množimo brojem -3 i dodajemo trećoj vrsti.

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right]$$

Drugu jednačinu množimo brojem -1.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ y - 5z &= -9 \\ -10y - 2z &= -14. \end{aligned}$$

Drugu vrstu množimo brojem -1.

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right]$$

Drugu jednačinu, pomnoženu brojem 10 dodajemo trećoj.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ y - 5z &= -9 \\ -52z &= -104. \end{aligned}$$

Drugu vrstu, pomnoženu brojem 10 dodajemo trećoj.

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right]$$