Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Градимир Божиловић
Драган Олћан
Антоније Ђорђевић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Четврти део

Кола променљивих струја

Треће издање

Академска мисао
Београд 2016.

Градимир Божиловић, Драган Олћан, Антоније Ђорђевић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Четврти део

Кола променљивих струја

Треће издање

Рецензенти
др Владимир Петровић
др Милан Илић

Одлуком Наставно-научног већа Електротехничког факултета број 182/2 од 22. марта 2010. године ова књига је одобрена као наставни материјал на Електротехничком факултету у Београду.

Издавачи
Академска мисао
Електротехнички факултет
Београд

Дизајн корица
Зорица Марковић, академски сликар

Штампа
Академска мисао, Београд

Тираж 500 примерака

ИСБН 978-86-7466-624-1

НАПОМЕНА: Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге у целини или у деловима није дозвољено без претходне изричите сагласности и писменог одобрења издавача.

Предговор

Збирка задатака из Основа електротехнике, Кола променљивих струја, излази као четврти од четири дела збирке која је намењена предметима групе Основи електротехнике, који се предају по наставном плану прве године Основних академских студија електротехнике и рачунарства на Електротехничком факултету Универзитета у Београду. Ти предмети су Основи електротехнике 1 и 2, Практикум из Основа електротехнике 1 и 2, и Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Овај помоћни уџбеник је проистекао из нарасле потребе за обједињеном збирком питања и задатака која са већ постојећим уџбеником „Основи електротехнике“ А. Ђорђевића (који је иницирао писање ове збирке) представља потребну и довољну литературу за предмете Основи електротехнике 1 и 2. Збирка у потпуности покрива градиво које се ради на вежбама, обезбеђује материјал за самостални рад студената, укључујући и проверу знања на задацима тежине испитних задатака и питања, а садржи и додатни материјал за проширивање знања.

Као и уџбеник „Основи електротехнике“, збирка је подељена у четири дела. Први део покрива електростатичко поље, други део поља и кола сталних струја, трећи део збирке обухвата стална магнетска поља и променљива електромагнетска поља, а четврти део се бави колима временски променљивих струја.

Задаци без звездице су уводни и основни, а заједно са тежим задацима, означеним једном звездицом, одговарају предметима Основи електротехнике 1 и 2. Задаци са две и три звездице представљају материјал за продубљивање знања, а део тих задатака је намењен и Практикумима из Основа електротехнике. Једноставнија питања и задаци покривају и тематске јединице које се обрађују на предмету Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Аутори се захваљују рецензентима ове збирке, предавачима на предметима Основи електротехнике 1 и 2, професору др инж. Владимиру Петровићу и професору др инж. Милану Илићу, на корисним сугестијама.

Београд, март 2010. Аутори

Предговор другом издању

У овом издању су исправљене уочене грешке. Аутори се захваљује асистенту Слободану Савићу који је детаљно прочитао збирку и указао на неке од тих грешака.

Београд, август 2013. Аутори

Предговор трећем издању

У овом издању су исправљене уочене грешке.

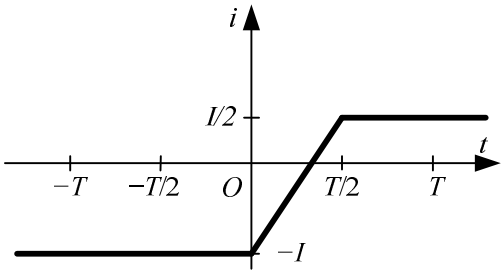
Београд, август 2016. Аутори

Садржај

1. Промењљиве струје 1
2. Елементи кола промењљивих струја 30
3. Једноставна кола простопериодичних струја 40
3.1. Временски домен 40
3.2. Фазорски дијаграми 58
3.3. Комплексни домен 73
3.4. Трансфигурације 99
3.5. Снаге 110
4. Сложена кола простопериодичних струја 154
4.1. Кирхофови закони 154
4.2. Метод контурних струја 162
4.3. Метод потенцијала чворова 171
5. Теореме 182
5.1. Линеарност и суперпозиција 182
5.2. Компензација 185
5.3. Тевененова и Нортонова теорема 192
5.4. Премештање генератора 209
5.5. Реципроцитет 212
5.6. Четворополи 214
5.7. Прилагођење по снази 221
5.8. Поправка фактора снаге 236
5.9. Симетрија и бисекција 239
6. Кола са спрегнутим калемовима 245
7. Трофазна кола 286
8. Фреквенцијске карактеристике 345
9. Прелазни режими 367
Литература 383

1. Променљиве струје

1. График алгебарског интензитета струје у функцији времена, за један референтни смер и усвојени почетни тренутак, приказан је на слици 1.1. (а) Написати израз за тај алгебарски интензитет. (б) Написати израз за алгебарски интензитет те струје када се промени референтни смер, а почетни тренутак усвоји за $\frac{T}{3}$ касније од претходног почетног тренутка.



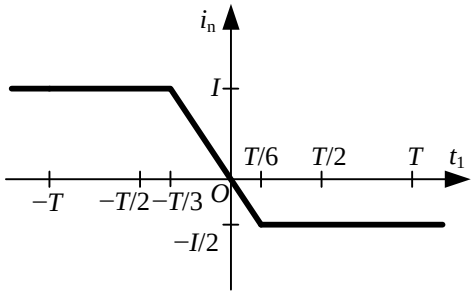
Слика 1.1.

РЕШЕЊЕ

(а) Користећи се изразом за једначину праве кроз тачке $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$, $y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, добија се $i(t) = \begin{cases} -I, & t \in (-\infty, 0) \\ \left(-1 + \frac{3}{T}t\right) I, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \frac{I}{2}, & t \in \left(\frac{T}{2}, \infty\right) \end{cases}$.

(б) Промена референтног смера уноси промену знака у алгебарски интензитет. Ново време t_1 и претходно време t за посматрање задате струје повезани су релацијом

$t = t_1 + \dfrac{T}{3}$, па је нови израз за струју $i_{\mathrm{n}}(t_1) = \begin{cases} I, & t_1 \in \left(-\infty, -\dfrac{T}{3}\right) \\ -\dfrac{3I}{T}t_1, & t_1 \in \left[-\dfrac{T}{3}, \dfrac{T}{6}\right] \\ -\dfrac{I}{2}, & t_1 \in \left(\dfrac{T}{6}, \infty\right) \end{cases}$, што је приказано на слици 1.2.



Слика 1.2.

2. Алгебарски интензитет струје дат је изразом $i(t) = I_{\mathrm{m}}\left|\cos \omega t\right|$, где је I_{m} позитивна величина. Написати израз за алгебарски интензитет те струје према супротном референтном смеру и почетном тренутку за $\dfrac{\pi}{3\omega}$ раније од претходног.

РЕЗУЛТАТ

Алгебарски интензитет струје одређен је изразом $i_{\mathrm{n}}(t_1) = -I_{\mathrm{m}}\left|\cos\left(\omega t_1 - \dfrac{\pi}{3}\right)\right|$.

3. Написати у каноничном облику следеће простопериодичне величине: (а) $i(t) = 2\sin \omega t$ A, (б) $u(t) = -15\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ V и (в) $e(t) = -\sin\left(\omega t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ mV.

РЕШЕЊЕ

Канонични облик простопериодичне величине је стандардни облик у коме се може написати свака простопериодична величина. На пример, уколико се ради са амплитудама, канонични облик напона $u(t)$ је

$$u(t) = U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \theta). \tag{3.1}$$

Уколико се ради са ефективним вредностима, канонични облик је

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta). \tag{3.2}$$

У овим изразима је U_m амплитуда напона ($U_\mathrm{m} > 0$), $U = U_\mathrm{m}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ефективна вредност ($U > 0$), ω кружна (угаона) учестаност ($\omega > 0$), а θ почетна фаза ($-\pi < \theta \le \pi$). Период тог напона је $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, а учестаност $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

(а) На основу идентитета $\sin\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$, канонични облик задате простопериодичне струје гласи $i(t) = 2\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{A}$. Амплитуда те струје је $I_\mathrm{m} = 2\,\mathrm{A}$, ефективна вредност $I = \sqrt{2}\,\mathrm{A}$, а почетна фаза $\psi = -\dfrac{\pi}{2}$.

(б) Како је $-\cos\alpha = \cos(\alpha \pm \pi)$, задати напон се може написати у облику $u(t) = 15\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \dfrac{3\pi}{4}\right)\mathrm{V}$. У извођењу смо одабрали знак минус уз π, да би почетна фаза напона $\theta = \dfrac{\pi}{4} \pm \pi$ била у стандардним границама $-\pi < \theta \le \pi$.

(в) На основу идентитета $-\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$, израз за задату електромоторну силу добија облик $e(t) = \cos\left(\omega t + \dfrac{7\pi}{6}\right)\mathrm{mV}$. Међутим, почетна фаза електромоторне силе је $\theta_\mathrm{e} = \dfrac{7\pi}{6} > \pi$. Да би се фаза довела у границе $-\pi < \theta_\mathrm{e} \le \pi$, потребно је одузети 2π. Тиме почетна фаза постаје $\theta_\mathrm{e} = -\dfrac{5\pi}{6}$, а канонични облик задате електромоторне силе је $e(t) = \cos\left(\omega t - \dfrac{5\pi}{6}\right)\mathrm{mV}$. Амплитуда те емс је $E_\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mV}$, а ефективна вредност $E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{mV}$.

4. Изрази за струју према истом референтном смеру и различитим почетним тренуцима су $i(t) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t + \psi) = 6\cos\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)\mathrm{A}$, односно $i(t_1) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t_1 + \psi_1) = 6\cos\left(100\pi t_1 + \dfrac{7\pi}{6}\right)\mathrm{A}$, за време t, односно t_1, у секундама. Израчунати временски размак између почетних тренутака за посматрану струју.

Решење

Означимо са Δt временски интервал од почетног тренутка времена t до почетног тренутка времена t_1. Тада је $t = t_1 + \Delta t$, па је $i = I_\mathrm{m}\cos(\omega t + \psi) = I_\mathrm{m}\cos\left(\omega(t_1 + \Delta t) + \psi\right) = I_\mathrm{m}\cos\left(\omega t_1 + (\omega\Delta t + \psi)\right) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t_1 + \psi_1)$, где

је $\omega\Delta t + \psi = \psi_1$ и $\omega = 100\pi\,\mathrm{s}^{-1}$. Одавде је тражена временска разлика $\Delta t = \dfrac{\psi_1 - \psi}{\omega} = \dfrac{\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{100\pi} = 15\,\mathrm{ms}$.

*Опште решење постављеног проблема је $\Delta t = 15\,\mathrm{ms} + \dfrac{k}{50}\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{ms} + 20k\,\mathrm{ms}$, где је $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, јер је $\cos(\omega t + \psi)$ периодична функција времена, $\cos\left(\omega\left(t + \dfrac{2k\pi}{\omega}\right) + \psi\right) = \cos(\omega t + \psi)$, са периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 20\,\mathrm{ms}$. Решење $\Delta t = -5\,\mathrm{ms}$ (за $k = -1$) је по модулу најмање од свих решења.

***5.** Две простопериодичне струје имају исту кружну учестаност и почетни тренутак, а различите амплитуде и почетне фазе. Доказати да је збир тих струја простопериодична струја исте кружне учестаности и одредити изразе за амплитуду и почетну фазу збира тих струја.

РЕШЕЊЕ

Напишимо сабирке у каноничном облику, $i_1(t) = I_{1\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_1)$ и $i_2(t) = I_{2\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_2)$. Збир струја је

$$i_1(t) + i_2(t) = i(t)\,. \tag{5.1}$$

Претпоставимо да се тај збир може написати у каноничном облику, $i(t) = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi)$. Потребно је да одредимо константне величине I_{m} и ψ тако да једначина (5.1) постаје идентитет (важи за сваки тренутак t), чиме бисмо доказали да је $i(t)$ такође простопериодична струја.

Једначине (5.1) сада постаје $I_{1\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_1) + I_{2\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_2) = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi)$. Развојем косинусна збира на основу идентитета $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, добија се $(I_{1\mathrm{m}}\cos\psi_1 + I_{2\mathrm{m}}\cos\psi_2)\cos\omega t - (I_{1\mathrm{m}}\sin\psi_1 + I_{2\mathrm{m}}\sin\psi_2)\sin\omega t = I_{\mathrm{m}}\cos\psi\cos\omega t - I_{\mathrm{m}}\sin\psi\sin\omega t$. Да би тај израз био идентитет, мора бити

$$I_{1\mathrm{m}}\cos\psi_1 + I_{2\mathrm{m}}\cos\psi_2 = I_{\mathrm{m}}\cos\psi \quad \text{и} \tag{5.2}$$

$$I_{1\mathrm{m}}\sin\psi_1 + I_{2\mathrm{m}}\sin\psi_2 = I_{\mathrm{m}}\sin\psi\,. \tag{5.3}$$

Из једначина (5.2) и (5.3) добија се

$$I_{\mathrm{m}} = \sqrt{I_{1\mathrm{m}}^2 + I_{2\mathrm{m}}^2 + 2I_{1\mathrm{m}}I_{2\mathrm{m}}\cos(\psi_1 - \psi_2)}\,, \tag{5.4}$$

при чему се узима само позитивна вредност квадратног корена јер је $I_{\mathrm{m}} \geq 0$. Даље је

$$\cos\psi = \frac{I_{1\mathrm{m}}\cos\psi_1 + I_{2\mathrm{m}}\cos\psi_2}{I_{\mathrm{m}}} \quad \text{и} \tag{5.5}$$