Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Градимир Божиловић
Драган Олћан
Антоније Ђорђевић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Трећи део

Електромагнетизам

Треће издање

Академска мисао
Београд 2016.

Градимир Божиловић, Драган Олћан, Антоније Ђорђевић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Трећи део

Електромагнетизам

Треће издање

Рецензенти
др Владимир Петровић
др Милан Илић

Одлуком Наставно-научног већа Електротехничког факултета број 63/2 од 26. јануара 2010. године ова књига је одобрена као наставни материјал на Електротехничком факултету у Београду.

Издавачи
Академска мисао
Електротехнички факултет
Београд

Дизајн корица
Зорица Марковић, академски сликар

Штампа
Академска мисао, Београд

Тираж 500 примерака

ИСБН 978-86-7466-623-4

НАПОМЕНА: Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге у целини или у деловима није дозвољено без претходне изричите сагласности и писменог одобрења издавача.

Предговор

Збирка задатака из Основа електротехнике, Електромагнетизам, излази као трећи од четири дела збирке која је намењена предметима групе Основи електротехнике, који се предају по наставном плану прве године Основних академских студија електротехнике и рачунарства на Електротехничком факултету Универзитета у Београду. Ти предмети су Основи електротехнике 1 и 2, Практикум из Основа електротехнике 1 и 2, и Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Овај помоћни уџбеник је проистекао из нарасле потребе за обједињеном збирком питања и задатака која са већ постојећим уџбеником „Основи електротехнике“ А. Ђорђевића (који је иницирао писање ове збирке) представља потребну и довољну литературу за предмете Основи електротехнике 1 и 2. Збирка у потпуности покрива градиво које се ради на вежбама, обезбеђује материјал за самостални рад студената, укључујући и проверу знања на задацима тежине испитних задатака и питања, а садржи и додатни материјал за проширивање знања.

Као и уџбеник „Основи електротехнике“, збирка је подељена у четири дела. Први део покрива електростатичко поље, други део поља и кола сталних струја, трећи део збирке обухвата стална магнетска поља и променљива електромагнетска поља, а четврти део се бави колима временски променљивих струја.

Задаци без звездице су уводни и основни, а заједно са тежим задацима, означеним једном звездицом, одговарају предметима Основи електротехнике 1 и 2. Задаци са две и три звездице представљају материјал за продубљивање знања, а део тих задатака је намењен и Практикумима из Основа електротехнике. Једноставнија питања и задаци покривају и тематске јединице које се обрађују на предмету Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Аутори се захваљују рецензентима ове збирке, предавачима на предметима Основи електротехнике 1 и 2, професору др инж. Владимиру Петровићу и професору др инж. Милану Илићу, на корисним сугестијама.

Београд, јануар 2010. Аутори

Предговор другом издању

У овом издању су исправљене уочене грешке. Аутори се захваљује доценту Слободану Савићу који је детаљно прочитао збирку и указао на неке од тих грешака.

Београд, фебруар 2013. Аутори

Предговор трећем издању

У овом издању су исправљене уочене грешке.

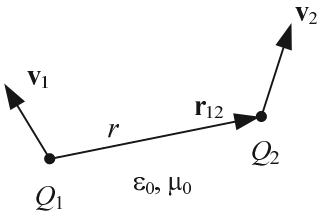
Београд, август 2016. Аутори

Садржај

1. Стално магнетско поље у вакууму 1
2. Стално магнетско поље у присуству материјала 54
3. Променљиво електромагнетско поље 94
4. Енергија магнетског поља и магнетске силе 165
5. Максвелове једначине 188
6. Кретање наелектрисане честице у електричном и магнетском пољу 192
Литература 197

1. Стално магнетско поље у вакууму

1. Два тачкаста наелектрисања, Q_1 и Q_2, крећу се у вакууму у односу на посматрача константним брзинама $\mathbf{v}_1$, односно $\mathbf{v}_2$, ($|\mathbf{v}_1|, |\mathbf{v}_2| << c_0 = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ m/s) као на слици 1.1. Колика електрична, а колика магнетска сила делује на наелектрисање Q_2, у тренутку када је растојање између наелектрисања r ?

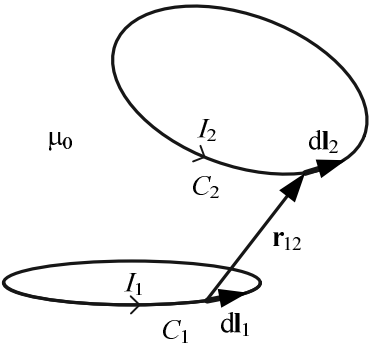


Слика 1.1.

РЕЗУЛТАТ

Електрична сила која делује на наелектрисање Q_2 је $\mathbf{F}_{e2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\mathbf{r}_{012}$, а магнетска сила је $\mathbf{F}_{m2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q_2\mathbf{v}_2 \times (Q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{012})}{r^2}$, где је $\mathbf{r}_{012} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r}$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m .

2. Круте жичане контуре C_1 и C_2 налазе се у вакууму и у њима постоје сталне струје I_1, односно I_2 (слика 2.1). (а) Написати израз за магнетску силу којом један струјни елемент контуре C_1 делује на један струјни елемент контуре C_2. *(б) Написати израз за укупну магнетску силу којом контура C_1 делује на контуру C_2. *(в) За које од ових сила важи принцип акције и реакције?



Слика 2.1.

Решење

(а) Тражени вектор магнетске силе којом један струјни елемент прве контуре делује на један елемент друге контуре је $\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{m}2}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_2\mathrm{d}\mathbf{l}_2\times\left(I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\mathbf{r}_{012}\right)}{r^2}$, где је $r=|\mathbf{r}_{12}|$, $\mathbf{r}_{012}=\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{r}$, $\mathbf{r}_{12}$ је вектор положаја елемента $\mathrm{d}\mathbf{l}_2$ у односу на $\mathrm{d}\mathbf{l}_1$, а оријентације ових елемената се поклапају са референтним смеровима струја контура.

(б) Укупна магнетска сила на један струјни елемент контуре C_2 добија се суперпозицијом сила којима на тај елемент делују сви елементи контуре C_1. Резултантна сила којом контура C_1 делује на контуру C_2 добија се сабирањем сила које делују на све елементе контуре C_2,

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\left(I_2\mathrm{d}\mathbf{l}_2\times\oint_{C_1}\frac{\left(I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\mathbf{r}_{012}\right)}{r^2}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{I_2\mathrm{d}\mathbf{l}_2\times\left(I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\mathbf{r}_{012}\right)}{r^2}.$$

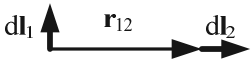
Да ли струјни елементи сталних струја могу постојати изоловани, или је неопходно да се струјни пут затвара?

Шта представља израз $\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\dfrac{I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\mathbf{r}_{012}}{r^2}$?

Колика је резултантна магнетска сила којом контура C_2 делује сама на себе?

(в) За магнетску силу којом један струјни елемент делује на други не важи принцип акције и реакције.

Као пример, ако вектори $\mathrm{d}\mathbf{l}_1$, $\mathrm{d}\mathbf{l}_2$ и $\mathbf{r}_{12}$ леже у једној равни, вектори $\mathrm{d}\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}_{12}$ су ортогонални, а вектори $\mathrm{d}\mathbf{l}_2$ и $\mathbf{r}_{12}$ су колинеарни (слика 2.2), тада је $\left|\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{m}2}\right|=\left|\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_2\mathrm{d}\mathbf{l}_2\times\left(I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\mathbf{r}_{012}\right)}{r^2}\right|=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{|I_1I_2|\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2}{r^2}\neq 0$, док је $\left|\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{m}1}\right|=\left|\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\left(I_2\mathrm{d}\mathbf{l}_2\times\mathbf{r}_{021}\right)}{r^2}\right|=0$, па је $\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{m}2}\neq-\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{m}1}$.



Слика 2.2.

За резултантну силу принцип акције и реакције важи, односно важи идентитет $\mathbf{F}_{\mathrm{m}2}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\dfrac{I_2\mathrm{d}\mathbf{l}_2\times\left(I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\mathbf{r}_{012}\right)}{r^2}=-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\dfrac{I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\left(I_2\mathrm{d}\mathbf{l}_2\times\mathbf{r}_{021}\right)}{r^2}=-\mathbf{F}_{\mathrm{m}1}$. Доказ је дат у поглављу о енергији магнетског поља и магнетским силама, у задатку 232.

3. Наелектрисана честица наелектрисања $Q=10\,\mathrm{nC}$ улеће брзином $\mathbf{v}=10\,\mathbf{i}_y\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ у простор у коме постоји електрично поље вектора јачине $\mathbf{E}=10\,\mathbf{i}_x\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ и магнетско поље индукције $\mathbf{B}=2\,\mathbf{i}_z\,\mathrm{mT}$. Израчунати Лоренцову силу на честицу.

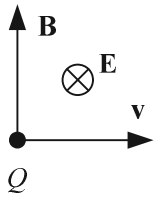
РЕЗУЛТАТ

Лоренцова сила је $\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 300\,\mathbf{i}_x$ nN .

4. Наелектрисана честица наелектрисања Q креће се у вакууму брзином константног интензитета $|\mathbf{v}|$ у хомогеном магнетском пољу индукције **B**, нормалном на правац кретања честице. Колики је вектор јачине хомогеног електричног поља које треба успоставити да би се честица, под дејством електричне и магнетске силе, кретала праволинијски?

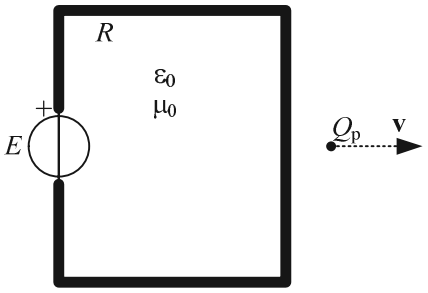
РЕШЕЊЕ

Да би се честица кретала праволинијски, Лоренцова сила треба да буде нула, односно $\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$, одакле је $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, као што је приказано на слици 4.1.

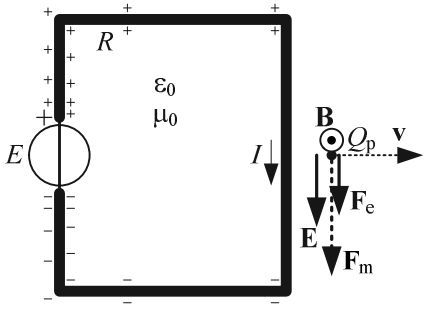


Слика 4.1.

***5.** Ненаелектрисана жичана контура отпорности R, приказана на слици 5.1, непокретна је у односу на посматрача. Контура је прикључена на генератор сталне електромоторне силе E ($E > 0$). У близини контуре налази се пробно наелектрисање Q_p ($Q_\mathrm{p} > 0$). Квалитативно описати каква сила делује на пробно наелектрисање ако оно (а) мирује и (б) креће се брзином **v**.



Слика 5.1.



Слика 5.2.

РЕШЕЊЕ

(а) На површи жице, посебно у околини генератора, постоји вишак наелектрисања (слика 5.2) од кога потиче електрично поље у проводнику, које одржава струју у контури. Међутим, електрично поље тог вишка (**E**) постоји не само у проводнику, већ и у његовој околини. Стога на пробно наелектрисање делује електрична сила, $\mathbf{F}_\mathrm{e} = Q\mathbf{E}$.

Осим тога, пробно наелектрисање ($Q_\mathrm{p} > 0$) доводи до електростатичке индукције: у делу контуре ближе наелектрисању Q_p јавља се вишак негативног, а у даљем делу вишак позитивног наелектрисања. Услед тога постоји и компонента електричне силе

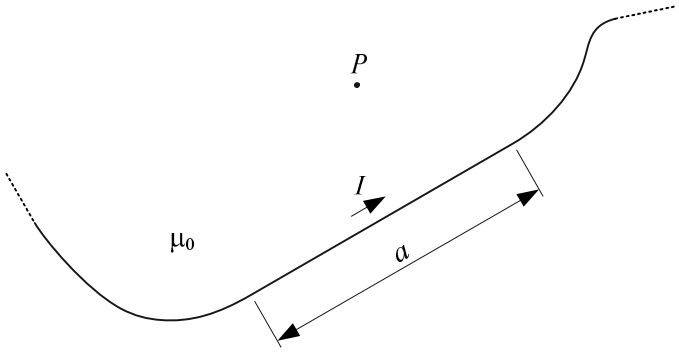
која привлачи пробно наелектрисање ка контури. Међутим, пробно наелектрисање је, по претпоставци, мало по количини, па је овај ефекат занемарљив.

(б) У околини контуре постоји стално магнетско поље (слика 5.2), које потиче од струје у контури. Када се пробно наелектрисање креће, осим електричне силе, $\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E}$, на њега делује и магнетска сила, $\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$.

**Као нумерички пример, програмом *AWAS* анализирана је квадратна жичана контура странице $a = 100\,\text{mm}$. Полупречник жице је $r = 1\,\text{mm}$, а жица је од бакра, специфичне проводности $\sigma = 58\,\text{MS/m}$. Електромоторна сила идеалног напонског генератора је простопериодична, ефективне вредности $E = 100\,\text{mV}$ и учестаности $f = 1\,\text{Hz}$. Одговарајућа ефективна вредност струје у контури је $I = 45{,}55\,\text{A}$. У тачки која је на одстојању $10\,\text{mm}$ од контуре (прецизније, од осе десне странице контуре), на месту на коме се налази пробно наелектрисање на слици 5.2, добијена је ефективна вредност електричног поља $E \approx 0{,}13\,\text{V/m}$ и ефективна вредност магнетске индукције $B \approx 0{,}73\,\text{mT}$. У посматраном случају, променљиве струје стварају индуковано електрично поље, али је то поље знатно слабије од електричног поља вишка наелектрисања. У тачки која одговара пројекцији положаја Q_p на десну страницу контуре добијена је ефективна вредност електричног поља у проводнику $E \approx 0{,}25\,\text{V/m}$, што одговара интензитету $E = J/\sigma$.

Читаоцу се препоручује да нумерички добијени резултат за магнетску индукцију провери помоћу Био-Саваровог закона. (Резултат: 0,729 mT.)

6. Извести израз за вектор магнетске индукције у тачки P који потиче од праволинијског проводника коначне дужине a (слика 6.1). Проводник представља део сложене жичане контуре која се налази у ваздуху, у којој постоји стална струја јачине I према референтном смеру на слици.



Слика 6.1.