Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Градимир Божиловић
Драган Олћан
Антоније Ђорђевић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Други део

Сталне струје

Треће издање

Академска мисао
Београд 2016.

Градимир Божиловић, Драган Олћан, Антоније Ђорђевић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Други део

Сталне струје

Треће издање

Рецензенти
др Владимир Петровић
др Милан Илић

Одлуком Наставно-научног већа Електротехничког факултета број 2898 од 20. октобра 2009. године ова књига је одобрена као наставни материјал на Електротехничком факултету у Београду.

Издавачи
Академска мисао
Електротехнички факултет
Београд

Дизајн корица
Зорица Марковић, академски сликар

Штампа
Академска мисао, Београд

Тираж 500 примерака

ИСБН 978-86-7466-622-7

НАПОМЕНА: Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге у целини или у деловима није дозвољено без претходне изричите сагласности и писменог одобрења издавача.

Предговор

Збирка задатака из Основа електротехнике, Сталне струје, излази као други од четири дела збирке која је намењена предметима групе Основи електротехнике, који се предају по наставном плану прве године Основних академских студија електротехнике и рачунарства на Електротехничком факултету Универзитета у Београду. Ти предмети су Основи електротехнике 1 и 2, Практикум из Основа електротехнике 1 и 2, и Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Овај помоћни уџбеник је проистекао из нарасле потребе за обједињеном збирком питања и задатака која са већ постојећим уџбеником „Основи електротехнике“ А. Ђорђевића (који је иницирао писање ове збирке) представља потребну и довољну литературу за предмете Основи електротехнике 1 и 2. Збирка у потпуности покрива градиво које се ради на вежбама, обезбеђује материјал за самостални рад студената, укључујући и проверу знања на задацима тежине испитних задатака и питања, а садржи и додатни материјал за проширивање знања.

Као и уџбеник „Основи електротехнике“, збирка је подељена у четири дела. Први део покрива електростатичко поље, други део поља и кола сталних струја, трећи део збирке обухвата стална магнетска поља и променљива електромагнетска поља, а четврти део се бави колима временски променљивих струја.

Задаци без звездице су уводни и основни, а заједно са тежим задацима, означеним једном звездицом, одговарају предметима Основи електротехнике 1 и 2. Задаци са две и три звездице представљају материјал за продубљивање знања, а део тих задатака је намењен и Практикумима из Основа електротехнике. Једноставнија питања и задаци покривају и тематске јединице које се обрађују на предмету Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Аутори се захваљују рецензентима ове збирке, предавачима на предметима Основи електротехнике 1 и 2, професору др инж. Владимиру Петровићу и професору др инж. Милану Илићу, на корисним сугестијама. Аутори се посебно захваљују професору др инж. Предрагу Пејовићу на сугестијама у вези са појединим поглављима збирке. Милан Ромић, студент Енергетског одсека и демонстратор при Лабораторији за Основе електротехнике, и Марија Јанковић, победница Електријаде 2007. године из Основа електротехнике, учествовали су у провери решења једног дела задатака из збирке, па им се аутори на томе захваљују.

Београд, септембар 2009. Аутори

Предговор другом издању

У овом издању су исправљене уочене грешке. Аутори се захваљује асистенту Слободану Савићу који је детаљно прочитао збирку и указао на неке од тих грешака.

Београд, август 2013. Аутори

Предговор трећем издању

У овом издању су исправљене уочене грешке.

Београд, август 2016. Аутори

Садржај

1. Стално струјно поље 1
2. Једноставна електрична кола 31
3. Сложена електрична кола 54
3.1. Кирхофови закони 54
3.2. Метод контурних струја 85
3.3. Метод потенцијала чворова 98
3.4. Трансфигурације мрежа отпорника 116
4. Теореме 131
4.1. Линеарност и суперпозиција 131
4.2. Компензација 136
4.3. Тевененова и Нортонова теорема 151
4.4. Премештање генератора 193
4.5. Реципроцитет 201
4.6. Прилагођење по снази 206
4.7. Симетрија и бисекција 218
5. Четворополи и контролисани генератори 235
5.1. Четворополи 235
5.2. Контролисани генератори 261
6. Нелинеарна кола 278
7. Кола са кондензаторима 287
Литература 347

1. Стално струјно поље

1. У дугачком хомогеном бакарном жичаном проводнику површине попречног пресека $S = 50\,\mathrm{mm}^2$ успостављена је стална струја густине $J = 2{,}5\,\mathrm{A}/\mathrm{mm}^2$. Специфична електрична проводност бакра је $\sigma = 58\cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$, атомска маса[1] $A_{\mathrm{Cu}} = 63{,}546\,u$ и специфична густина $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}9\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$. Сматрајући да у електричној струји учествује по један електрон[2] сваког атома бакра, израчунати (а) средњу брзину кретања електрона услед деловања електричног поља, (б) јачину струје проводника, (в) јачину електричног поља у проводнику, (г) запреминску густину снаге Џулових губитака и (д) подужну густину снаге Џулових губитака у жици.

Решење

(а) Вектор густине струје је $\mathbf{J} = N'Q_{\mathrm{e}}\mathbf{v}$, где је N' концентрација, а $\mathbf{v}$ макроскопска средња брзина кретања слободних носилаца (електрона). Одавде је $|\mathbf{v}| = \dfrac{J}{N'e}$. Концентрација слободних носилаца је у посматраном случају $N' = N'_{\mathrm{Cu}}$, где је N'_{Cu} концентрација атома бакра. Како је проводник хомоген, то је $N'_{\mathrm{Cu}} = \dfrac{(N_{\mathrm{Cu}})_{\mathrm{u}\,\Delta v}}{\Delta v} = \dfrac{(m_{\mathrm{Cu}})_{\mathrm{u}\,\Delta v}}{A_{\mathrm{Cu}}\Delta v} = \dfrac{\rho_{\mathrm{Cu}}\Delta v}{A_{\mathrm{Cu}}\Delta v} = \dfrac{\rho_{\mathrm{Cu}}}{A_{\mathrm{Cu}}}$, где је m_{Cu} маса бакра у запремини Δv па је $N' = 8{,}44\cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$ и $|\mathbf{v}| = 0{,}185\,\mathrm{mm/s}$.

(б) Јачина струје проводника је $I = JS = 125\,\mathrm{A}$.

(в) Из Омовог закона у локалном облику ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$), који представља конститутивну релацију за струјно поље, произилази $E = \dfrac{J}{\sigma} = 43{,}1\,\mathrm{mV/m}$.

---

[1] Атомска јединица масе је $u \approx 1{,}66\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

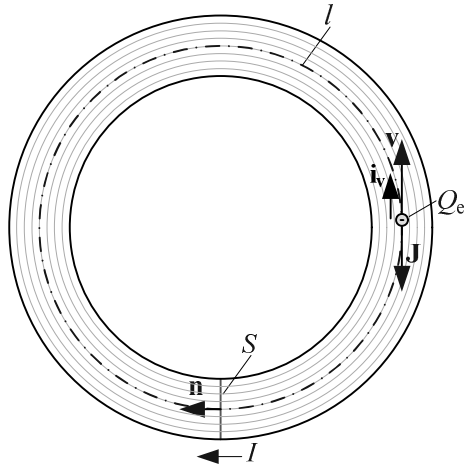
[2] Наелектрисање електрона је $Q_{\mathrm{e}} = -e \approx -1{,}602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

(г) Запреминска густина снаге Џулових губитака одређена је Џуловим законом у локалном облику, $\frac{\mathrm{d}P_\mathrm{J}}{\mathrm{d}v} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = \frac{J^2}{\sigma} = \sigma E^2 \approx 108\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^3}$.

(д) Подужна густина снаге Џулових губитака је $P'_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}P_\mathrm{J}}{\mathrm{d}v}S \approx 5{,}4\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$.

Колика је снага губитака у целом проводнику ако је његова дужина $l = 1\,\mathrm{km}$?

2. У танкој торусној цеви, дужине средње линије $l = 12\,\mathrm{m}$ и површине попречног пресека $S = 10\,\mathrm{cm}^2$, остварено је кружно кретање електрона паралелно средњој линији торуса, сталном брзином $v = 2\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. У току једног периода кретања електрона, кроз попречни пресек цеви прође $N = 6\cdot 10^{11}$ електрона. Израчунати (а) вектор густине електричне струје у цеви и (б) јачину струје у цеви.



Слика 2.1.

РЕШЕЊЕ

(а) Уз претпоставку да су електрони равномерно распоређени у цеви и да су им брзине једнаке, вектор густине електричне струје образоване кретањем електрона је $\mathbf{J} = N' Q_\mathrm{e}\mathbf{v}$. Концентрација електрона је $N' = \frac{N}{Sl} = 5\cdot 10^{13}\ \mathrm{m}^{-3}$, па је $\mathbf{J} \approx -1{,}6\,\frac{\mathrm{kA}}{\mathrm{m}^2}\mathbf{i}_\mathbf{v}$, где је $\mathbf{i}_\mathbf{v}$ орт вектора брзине, $\mathbf{i}_\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, који је тангенцијалан на средњу линију торуса (слика 2.1).

Линије вектора густине струје су концентричне кружнице паралелне средњој линији торуса. Струјнице немају ни почетак, ни крај, већ се затварају саме у себе, па је поље вектора **J** безизворно.

(б) Јачина струје у цеви је $I = \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}S$ јер је, по претпоставци, струјно поље хомогено у сваком попречном пресеку цеви, односно $I = 1{,}6\ \mathrm{A}$ у односу на референтни смер одређен ортом $\mathbf{n}$.

3. У посуди за електролизу налази се нормални раствор сребро нитрата $\left(\mathrm{AgNO_3}\right)$ у води. На једновалентне јоне Ag^+ и NO_3^- су се разложили сви молекули $\mathrm{AgNO_3}$. Када се у раствору успостави стална електрична струја, под утицајем електричног поља јони

имају средње брзине $|\mathbf{v}_+| = 0{,}007$ mm/s и $|\mathbf{v}_-| = 0{,}009$ mm/s. Израчунати вектор густине успостављене електричне струје.

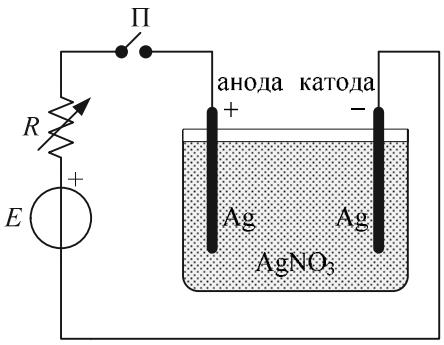
РЕШЕЊЕ

Како у раствору постоје две врсте покретних носилаца електрицитета, то је вектор густине електричне струје $\mathbf{J} = N'_+Q_+\mathbf{v}_+ + N'_-Q_-\mathbf{v}_-$, при чему су наелектрисања јона $Q_+ = -Q_- = +1{,}602\cdot10^{-19}$ C. Вектори $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ имају исти правац као вектор електричног поља у раствору. Вектор $\mathbf{v}_+$ има исти смер као вектор електричног поља, а вектор $\mathbf{v}_-$ има супротан смер.

Нормални раствор је онај код кога се у $1\,\mathrm{dm}^3$ раствора налази један мол растворка[3]. Концентрације јона су стога $N'_+ = N'_- = 6{,}022\cdot10^{23}\ \mathrm{dm}^{-3}$.

Густина струје је $\mathbf{J} = 1{,}54\,\dfrac{\mathrm{mA}}{\mathrm{mm}^2}\mathbf{i}_\mathbf{E}$, где је $\mathbf{i}_\mathbf{E}$ орт вектора електричног поља у раствору.

****4.** У посуди за електролизу, чије су анода и катода од сребра, налази се раствор сребро нитрата у води (слика 4.1)[4]. Затварањем прекидача П успоставља се стална струја I у колу и почне електролиза. Израчунати јачину струје при којој ће се за време $\Delta t = 12$ h на катоди издвојити сребро масе $m = 25$ g. Атомска маса сребра је $A_{\mathrm{Ag}} = 107{,}87\,u$, а валентност $z_{\mathrm{Ag}} = 1$.



Слика 4.1.

РЕШЕЊЕ

У посуди за електролизу са раствором сребро нитрата у води и електродама од сребра, молекули растворка ($\mathrm{AgNO_3}$) разлажу се на јоне, $\mathrm{AgNO_3 \rightarrow Ag^+ + NO_3^-}$. По успостављању струје у електролиту, јони сребра ($\mathrm{Ag^+}$) одлазе на катоду, а јони $\mathrm{NO_3^-}$ на аноду. На електродама се придошли јони неутрализују. Неутрализовано сребро таложи се на катоди, а $\mathrm{NO_3}$ група реагује на аноди са сребром и формира сребро нитрат, који се

---

[3] Један мол (1 mol) је количина супстанце која садржи исти број молекула (или атома) те супстанце колико има молекула у 12 g угљеника C-12. Тај број је Авогадрова константа (Авогадров број), $N_\mathrm{A} = 6{,}02214179\cdot10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1} \approx 6{,}022\cdot10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$. Између атомске јединице масе и Авогадрове константе важи релација $uN_\mathrm{A} = 1$ g/mol.

[4] Овакав уређај (волтаметар) употребљавао се за мерење протекле количине електрицитета на основу мерења масе издвојеног сребра, а тиме и за мерење јачине сталне струје.

потом раствара и дисоцира. На тај начин долази до транспорта сребра са аноде на катоду. Сребро наталожено на катоди је скоро потпуно чисто.

Први Фарадејев закон електролизе установљава да је маса супстанце која се при електролизи издваја на електроди, линеарно пропорционална количини електрицитета која протекне кроз електролит (q).

Други Фарадејев закон електролизе установљава да је, за задату количину електрицитета, маса издвојене супстанце сразмерна њеном хемијском еквиваленту[5].

Оба закона се могу исказати формулом,

$$m = \frac{q}{F}\frac{M}{z}, \tag{4.1}$$

где је $\frac{M}{z}$ хемијски еквивалент, а F Фарадејева константа. Та константа се назива фарадеј и износи $F = N_{\mathrm{A}} e = 96485{,}3399\ \mathrm{C/mol} \approx 96500\ \mathrm{C/mol}$, где је N_{A} Авогадрова константа, а e елементарно наелектрисање.

Из формуле (4.1) произилази да количина електрицитета од $96500\ \mathrm{C}$ издвоји на катоди масу једног мола једновалентног метала, масу једне половине мола двовалентног метала, масу једне трећине мола тровалентног метала итд.

Формула (4.1) се пише и у облику

$$m = aq, \tag{4.2}$$

где је $a = \frac{1}{F}\frac{M}{z}$ електрохемијски еквивалент супстанце[6]. Према подацима из текста задатка, електрохемијски еквивалент сребра је $a_{\mathrm{Ag}} = \frac{1}{F}\frac{M_{\mathrm{Ag}}}{z_{\mathrm{Ag}}} \approx 0{,}001118\ \mathrm{g/C}$.

На основу (4.2), количина електрицитета потребна да издвоји сребро масе $m = 25\ \mathrm{g}$ је $q = \frac{m}{a_{\mathrm{Ag}}} \approx 22{,}36\ \mathrm{kC}$. Како је, по претпоставци задатка, јачина струје у електролиту стална, то је потребна јачина струје $I = \frac{q}{\Delta t} \approx 0{,}518\ \mathrm{A}$.

---

[5] Хемијски еквивалент неке супстанце је количник моларне масе (M) и валентности јона те супстанце (z), односно M / z. Моларна маса (маса једног мола) обично се изражава у грамима по молу, што је нумерички исто као и молекулска (односно атомска) маса те супстанце (A) изражена у атомским јединицама масе (u).

[6] Електрохемијски еквивалент је маса коју издвоји протекло наелектрисање од $1\ \mathrm{C}$.