Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Градимир Божиловић
Драган Олћан
Антоније Ђорђевић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Први део

Електростатика

Треће издање

Академска мисао
Београд 2016.

Градимир Божиловић, Драган Олћан, Антоније Ђорђевић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Први део

Електростатика

Треће издање

Рецензенти
др Владимир Петровић
др Милан Илић

Одлуком Наставно-научног већа Електротехничког факултета број 926 од 14. априла 2009. године ова књига је одобрена као наставни материјал на Електротехничком факултету у Београду.

Издавачи
Академска мисао
Електротехнички факултет
Београд

Дизајн корица
Зорица Марковић, академски сликар

Штампа
Академска мисао, Београд

Тираж 500 примерака

ИСБН 978-86-7466-621-0

НАПОМЕНА: Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге у целини или у деловима није дозвољено без претходне изричите сагласности и писменог одобрења издавача.

Предговор

Збирка задатака из Основа електротехнике, Електростатика, излази као први од четири дела збирке која је намењена предметима групе Основи електротехнике, који се предају по наставном плану прве године Основних академских студија електротехнике и рачунарства на Електротехничком факултету Универзитета у Београду. Ти предмети су Основи електротехнике 1 и 2, Практикум из Основа електротехнике 1 и 2, и Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Овај помоћни уџбеник је проистекао из нарасле потребе за обједињеном збирком питања и задатака која са већ постојећим уџбеником „Основи електротехнике“ А. Ђорђевића (који је иницирао писање ове збирке) представља потребну и довољну литературу за предмете Основи електротехнике 1 и 2. Збирка у потпуности покрива градиво које се ради на вежбама, обезбеђује материјал за самостални рад студената, укључујући и проверу знања на задацима тежине испитних задатака и питања, а садржи и додатни материјал за проширивање знања.

Као и уџбеник „Основи електротехнике“, збирка је подељена у четири дела. Први део покрива електростатичко поље, други део поља и кола сталних струја, трећи део збирке обухвата стална магнетска поља и променљива електромагнетска поља, а четврти део се бави колима временски променљивих струја.

Задаци без звездице су уводни и основни, а заједно са тежим задацима, означеним једном звездицом, одговарају предметима Основи електротехнике 1 и 2. Задаци са две звездице представљају материјал за продубљивање знања, а део тих задатака је намењен и Практикумима из Основа електротехнике. Једноставнија питања и задаци покривају и тематске јединице које се обрађују на предмету Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Аутори се захваљују рецензентима ове збирке, предавачима на предметима Основи електротехнике 1 и 2, професору др инж. Владимиру Петровићу и доценту др инж. Милану Илићу, на корисним сугестијама. Неколико идеја за испитне задатке који се налазе у збирци потичу од доцента др инж. Марије Николић и асистента мр инж. Славољуба Марковића, који учествују у извођењу вежби из Основа електротехнике, па им се аутори најсрдачније захваљују. Аутори се захваљују и студенткињи Марији Јанковић, победници Електријаде 2007. године из Основа електротехнике, која је проверила решења већине задатака.

Београд, април 2009. Аутори

Предговор другом издању

У овом издању су исправљене уочене грешке. Аутори се захваљује асистенту Слободану Савићу који је детаљно прочитао збирку и указао на неке од тих грешака.

Београд, септембар 2012. Аутори

Предговор трећем издању

У овом издању су исправљене уочене грешке.

Београд, август 2016. Аутори

Садржај

1. Кулонов закон и вектор јачине електричног поља 1
2. Електростатички потенцијал и напон 33
3. Гаусов закон 58
4. Проводници у електростатичком пољу 83
5. Капацитивности 110
6. Електростатичко поље у присуству диелектрика 131
7. Силе у електростатичком пољу 183
Литература 191

1. Кулонов закон и вектор јачине електричног поља

1. Бакарна куглица запремине $v = 1\,\mathrm{cm}^3$ хомогена је у материјалном погледу и електрички неутрална. Запреминска густина бакра је $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}960\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$, а атом бакра садржи $N_{\mathrm{p}} = 29$ протона и $N_{\mathrm{n}} = 35$ неутрона. За ту куглицу израчунати (а) број атома бакра, (б) укупно наелектрисање свих електрона и (в) укупно наелектрисање свих протона.

Решење

(а) Концентрација атома бакра је $N'_{\mathrm{Cu}} = \dfrac{(m_{\mathrm{Cu}})_{\Delta v}}{A_{\mathrm{Cu}}\Delta v}$, где је $(m_{\mathrm{Cu}})_{\Delta v} = \rho_{\mathrm{Cu}}\Delta v$ маса бакра запремине Δv, а A_{Cu} атомска маса бакра. Сматрајући да су масе протона и неутрона једнаке атомској јединици масе (u), која износи $u = 1{,}660538782\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \approx 1{,}66\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, атомска маса бакра је $A_{\mathrm{Cu}} = \left(N_{\mathrm{p}} + N_{\mathrm{n}}\right)u = 1{,}06\cdot 10^{-25}\ \mathrm{kg}$. Стога је концентрација атома бакра $N'_{\mathrm{Cu}} = \dfrac{\rho_{\mathrm{Cu}}}{A_{\mathrm{Cu}}} = 8{,}45\cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$, па је број атома бакра у задатој куглици $N_{\mathrm{Cu}} = vN'_{\mathrm{Cu}} = 8{,}45\cdot 10^{22}$.

(б) Укупно наелектрисање свих електрона у посматраној запремини бакра је $Q_{\mathrm{e\,uk}} = N_{\mathrm{Cu}}N_{\mathrm{e}}Q_{\mathrm{e}} \approx -392\ \mathrm{kC}$, где је $N_{\mathrm{e}} = N_{\mathrm{p}}$ број електрона једног атома бакра, а $Q_{\mathrm{e}} = -e = -1{,}602176487\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \approx -1{,}602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$ наелектрисање једног електрона.

(в) Укупно наелектрисање свих протона је $Q_{\mathrm{p\,uk}} = -Q_{\mathrm{e\,uk}} \approx 392\ \mathrm{kC}$. За електростатику, укупно наелектрисање свих електрона, односно протона, веома је велико.

2. Бакарна куглица запремине $v = 1\,\mathrm{cm}^3$ је наелектрисана, а њено наелектрисање је $Q = -10\,\mathrm{nC}$. Израчунати који део укупног негативног наелектрисања бакарне куглице представља задати вишак наелектрисања.

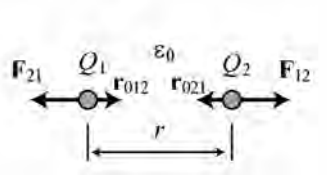
РЕШЕЊЕ

На основу задатка 1 је $\dfrac{Q}{Q_{\mathrm{e\,uk}}} = \dfrac{-10^{-8}\,\mathrm{C}}{-392\,\mathrm{kC}} = 2{,}55\cdot 10^{-14}$. У ваздуху, под нормалним околностима, не могу се остварити много већа наелектрисања куглице од задатог. Одатле се закључује да вишак (односно мањак) наелектрисања на наелектрисаном телу представља веома мали део укупног наелектрисања.

3. Два мала тела, наелектрисања $Q_1 = 30\,\mathrm{nC}$ и $Q_2 = -40\,\mathrm{nC}$, непокретна су у односу на посматрача и налазе се у вакууму на међусобном растојању $r = 0{,}3\,\mathrm{m}$. Израчунати векторе електричних сила на тела.

РЕШЕЊЕ

Сматрајући наелектрисања Q_1 и Q_2 тачкастим, вектор електричне силе је одређен Кулоновим законом,



Слика 3.1.

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\mathbf{r}_{012} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\mathbf{r}_{012}. \tag{3.1}$$

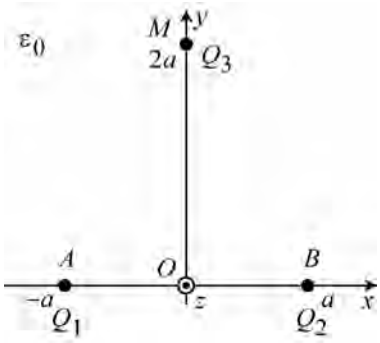
При овоме је, у SI јединицама, $\varepsilon_0 \approx 8{,}8542\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $k \approx 9\cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$, а $\mathbf{r}_{012}$ јединични вектор оријентисан ка наелектрисаном телу на које се одређује сила. На слици 3.1 нацртан је вектор $\mathbf{F}_{12}$ у референтном смеру. Уврштавањем задатих величина у израз (3.1), за вектор силе на тело наелектрисања Q_2 добија се $\mathbf{F}_{12} = -1{,}2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\,\mathbf{r}_{012}$. Стваран смер вектора $\mathbf{F}_{12}$ је супротан референтном смеру, а електрична сила је привлачна.

Вектор силе на тело наелектрисања Q_1 је $\mathbf{F}_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}\mathbf{r}_{021} = -1{,}2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\,\mathbf{r}_{021}$.

Како је $\mathbf{r}_{021} = -\mathbf{r}_{012}$, то је $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, односно силе су једнаких интензитета, а супротних смерова.

У оквирима експеримената у вакууму, односно ваздуху, наелектрисања не прелазе ред величине микрокулона, па се из добијеног резултата закључује да су Кулонове силе веома малог интензитета.

4. Три мала тела, наелектрисања $Q_1 = Q_2 = 20\,\text{pC}$ и $Q_3 = -50\,\text{pC}$, налазе се у ваздуху у тачкама $A(-a,0,0)$, $B(a,0,0)$ и $M(0,2a,0)$, где је $a = 0{,}2\,\text{m}$, као на слици 4.1. Израчунати вектор силе на тело наелектрисања Q_3.

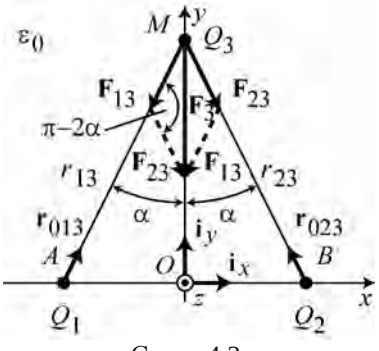


Слика 4.1.

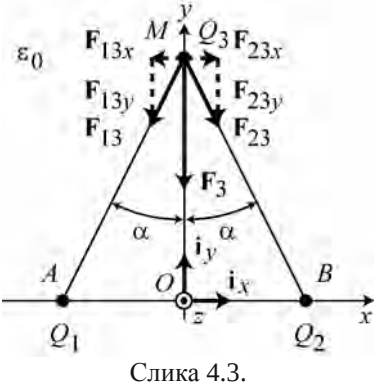
РЕШЕЊЕ

Сила на тело наелектрисања Q_3 може се одредити користећи се принципом суперпозиције јер је средина линеарна (ваздух): $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}$, где су $\mathbf{F}_{13}$ и $\mathbf{F}_{23}$ појединачне силе, а $\mathbf{F}_3$ резултантна сила (слика 4.2). На слици 4.2 су нацртани стварни смерови вектора $\mathbf{F}_{13}$, $\mathbf{F}_{23}$ и $\mathbf{F}_3$.

Појединачне силе $\mathbf{F}_{13}$ и $\mathbf{F}_{23}$ се одређују користећи се Кулоновим законом, као у изразу (3.1). Најпре је $\mathbf{F}_{13} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2}\mathbf{r}_{013} = -|\mathbf{F}_{13}|\,\mathbf{r}_{013}$, где је $r_{13} = a\sqrt{5}$ и $|\mathbf{F}_{13}| = 4{,}5\cdot 10^{-11}\,\text{N}$. Због симетрије је $|\mathbf{F}_{13}| = |\mathbf{F}_{23}|$. На основу косинусне теореме је $|\mathbf{F}_3|^2 = |\mathbf{F}_{13}|^2 + |\mathbf{F}_{23}|^2 + 2|\mathbf{F}_{13}||\mathbf{F}_{23}|\cos(\angle\mathbf{F}_{13},\mathbf{F}_{23}) = 2|\mathbf{F}_{13}|^2(1+\cos 2\alpha)$. Како је $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, добија се $|\mathbf{F}_3|^2 = 4|\mathbf{F}_{13}|^2\cos^2\alpha$, па је $|\mathbf{F}_3| = 2|\mathbf{F}_{13}|\cos\alpha = 2|\mathbf{F}_{13}|\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 8{,}04\cdot 10^{-11}\,\text{N}$ и $\mathbf{F}_3 = -8{,}04\cdot 10^{-11}\,\text{N}\,\mathbf{i}_y$.



Слика 4.2.



Слика 4.3.

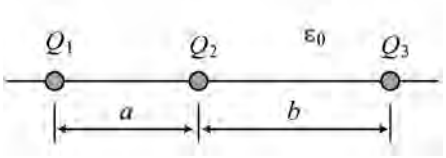
Читаоцу се оставља да покаже да се до истог резултата долази и на основу паралелограма сила.

До истог резултата се може доћи и растављањем вектора $\mathbf{F}_{13}$ и $\mathbf{F}_{23}$ на компоненте у усвојеном координатном систему и сабирањем тих компоненти. У Декартовом систему, у општем случају, вектор **A** се растаља на компоненте као

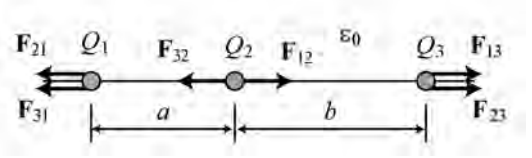
$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}_x + A_y\mathbf{i}_y + A_z\mathbf{i}_z = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_x)\mathbf{i}_x + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_y)\mathbf{i}_y + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_z)\mathbf{i}_z . \tag{4.1}$$

У посматраном случају (слика 4.3) компоненте вектора $\mathbf{F}_{13}$ и $\mathbf{F}_{23}$ су $F_{13x} = -|\mathbf{F}_{13}|\sin\alpha$, $F_{13y} = -|\mathbf{F}_{13}|\cos\alpha$, $F_{23x} = |\mathbf{F}_{23}|\sin\alpha$ и $F_{23y} = -|\mathbf{F}_{23}|\cos\alpha$. Вектори су у *Oxy*-равни, па су њихове *z*-компоненте једнаке нули. Резултантна сила је $\mathbf{F}_3 = (F_{13x} + F_{23x})\mathbf{i}_x + (F_{13y} + F_{23y})\mathbf{i}_y$, где је $F_{3x} = F_{13x} + F_{23x} = 0$ и $F_{3y} = -2|\mathbf{F}_{13}|\cos\alpha$. Стога је $\mathbf{F}_3 = F_{3y}\mathbf{i}_y \approx -8{,}04\cdot10^{-11}\ \mathrm{N}\,\mathbf{i}_y$.

5. Три мала наелектрисана тела налазе се у ваздуху на једној правој, на међусобним растојањима *a*, *b* и $(a+b)$, као на слици 5.1 ($a, b > 0$). Одредити у каквом односу треба да буду наелектрисања тих тела (Q_1, Q_2 и Q_3) да би сва три тела била у равнотежи под дејством електростатичких сила.



Слика 5.1.



Слика 5.2.

РЕШЕЊЕ

Сва три наелектрисана тела ће бити у равнотежи ако је резултантна електростатичка сила на свако од њих једнака нули. На слици 5.2 су нацртани референтни смерови вектора $\mathbf{F}_{ij}$, $i, j, = 1,2,3,\ i \neq j$. Да би се остварила равнотежа, потребно је да буде $\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} = 0$, $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} = 0$ и $\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} = 0$. Ако се ови услови изразе преко алгебарских интензитета сила у односу на одговарајуће референтне смерове, добија се $F_{21} + F_{31} = 0$, $F_{12} - F_{32} = 0$ и $\mathrm{F}_{13} + F_{23} = 0$. Како за електростатичке силе важи $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$, односно $F_{ij} = F_{ji}$, $i, j = 1,2,3,\ i \neq j$, то су за одређивање веза између наелектрисања Q_1, Q_2 и Q_3 довољна два од ова три услова. На основу Кулоновог закона, све силе су облика

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}^2}\mathbf{r}_{0ij} = F_{ij}\mathbf{r}_{0ij}\ ,\ i, j = 1,2,3,\ i \neq j , \tag{5.1}$$

где је $F_{ij} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_iQ_j}{r_{ij}^2}$ одговарајући алгебарски интензитет, па се из првог и трећег услова добијају једначине