SADRŽAJ

Predgovor 1

GLAVA 1
Uopštene funkcije i njihova svojstva

§1 Uvodni pojmovi 5
1.1 Pojam linearnog skupa (5) 1.2 Pojam funkcionala. Linearni i neprekidni funkcional (5)

§2 Osnovne i uopštene funkcije 7
2.1 Osnovne funkcije. Prostor osnovnih funkcija D (7) 2.2 Uopštene funkcije. Prostor uopštenih funkcija D' (8) 2.3 Anuliranje uopštene funkcije na nekom intervalu. Jednakost uopštenih funkcija na nekom intervalu (10) 2.4 Regularne i singularne uopštene funkcije (10) 2.5 δ nizovi (11) 2.6 Formule Sohockog (15) 2.7 Zamjena promjenljivih u uopštenim funkcijama (19) 2.8 Množenje uopštene funkcije sa beskonačno diferencijabilnom funkcijom (20)

§3 Diferenciranje uopštenih funkcija 22
3.1 Definicija izvoda uopštene funkcije (22) 3.2 Primjeri izračunavanja izvoda uopštenih funkcija (23)

§4 Konvolucija uopštenih funkcija 30
4.1 Definicija konvolucije uopštenih funkcija (30) 4.2 Svojstva konvolucije (32) 4.3 Konvoluciona algebra uopštenih funkcija D'_+ (32) 4.4 Jednačine u konvolucionoj algebri D'_+ (33)

GLAVA 2
Integralne transformacije uopštenih funkcija

§5 Prostor osnovnih funkcija S i prostor uopštenih funkcija umjerenog rasta S'... 39
5.1 Prostor osnovnih funkcija S (39) 5.2 Prostor uopštenih funkcija umjerenog rasta S' (39) 5.3 Konvolucija uopštenih funkcija umjerenog rasta (40)

§6 Furijeova transformacija uopštenih funkcija umjerenog rasta..... 41
6.1 Furijeova transformacija osnovnih funkcija iz S (41) 6.2 Furijeova transformacija uopštenih funkcija iz S' (44) 6.3 Svojstva Furijeove

transformacije (46) 6.4 Primjeri izračunavanja Furijeove transformacije (49)
§7 Laplasova transformacija uopštenih funkcija (operacioni račun) 52
7.1 Laplasova transformacija lokalno integrabilnih funkcija (53) 7.2 Laplasova transformacija uopštenih funkcija (53) 7.3 Svojstva Laplasove transformacije (55) 7.4 Inverzna Laplasova transformacija (58) 7.5 Primjeri nalaženja Laplasove transformacije (58) Dodatak D2.1 Košijeva teorema o rezidijumima (65) Dodatak D2.2 Tablica Furijeovih transformacija (65) Dodatak D2.3 Tablica Laplasovih transformacija (67)

GLAVA 3
Uopštene funkcije i diferencijalne jednačine
§8 Obične diferencijalne jednačine 69
8.1 Uopštena rješenja linearne diferencijalne jednačine (70) 8.2 Fundamentalna rješenja (71) 8.3 Nalaženje fundamentalnog rješenja pomoću Furijeove transformacije (74) 8.4 Nehomogene jednačine (jednačine sa desnom stranom) (80) 8.5 Košijev problem za linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima (80)
§9 Parcijalne diferencijalne jednačine 83
9.1 Uopštene funkcije u višedimenzionalnom slučaju (84) 9.2 Parcijalni diferencijalni operatori i parcijalne diferencijalne jednačine (89) 9.3 Primjeri fundamentalnih rješenja parcijalnih diferencijalnih operatora (90) 9.3.1 Fundamentalno rješenje Laplasovog operatora (90) 9.3.2 Fundamentalno rješenje talasnog operatora (95) 9.3.3 Fundamentalno rješenje trodimenzionalnog Helmholcovog operatora (98) 9.4 Grinova funkcija (103) Dodatak D3.1 Izračunavanje rezidijuma (105) Dodatak D3.2 Žordanova lema (105) Dodatak D3.3 Primjena Žordanove leme na izračunavanje integrala Furijeovog tipa (106)

GLAVA 4
Uopštene funkcije u teoriji elektromagnetskog polja
§10 Puasonova jednačina 108
10.1 Primjeri rješavanja Puasonove jednačine (110)
§11 Talasna jednačina 119
11.1 Definisanje potencijala elektromagnetskog polja i izvođenje talasnih jednačina za njih (119) 11.2 Rješenje talasne jednačine u slobodnom prostoru. Retardirani potencijali (122) 11.2.1 Elektromagnetsko polje elektrona u pokretu. Potencijali Lienara – Viherta (123)
§12 Helmholcova jednačina 125
12.1 Rješenje Helmholcove jednačine (126) 12.1.1 Zračenje Hercovog dipola (127)

GLAVA 5
Uopštene funkcije u teoriji električnih kola
§13 Primjena Laplasove transformacije u analizi električnih kola 130
13.1 Nalaženje odziva rednog RLC kola bez početne energije pri impulsnoj pobudi (131) 13.1.1 Konvoluciona i – formulacija (131) 13.1.2 Konvoluciona q–formulacija (134) 13.1.3 Diferencijalno operatorska q–formulacija (135) 13.2 Nalaženje odziva rednog RLC kola bez početne energije pri proizvoljnoj eksitaciji (137) 13.2.1 Konvoluciona i–formulacija (138) 13.2.2 Direktna primjena Laplasove transformacije u i–formulaciji (139) 13.2.3 Konvoluciona q–formulacija (139)

13.2.4 Direktna primjena Laplasove transformacije u *q*–formulaciji (140) 13.2.5 Diferencijalno operatorska *q*–formulacija (140) 13.3 Nalaženje odziva paralelnog RLC kola bez početne energije (143) 13.4 Nalaženje odziva rednog RLC kola sa početnom energijom (144) 13.5 Primjena Laplasove transformacije u analizi složenih električnih kola (149)

§14 Primjena Furijeove transformacije u analizi električnih kola 154

14.1 Nalaženje odziva radnog RLC kola bez početne energije pri impulsnoj pobudi (154) 14.1.1 Konvoluciona *i*–formulacija (154) 14.1.2 Konvoluciona *q*–formulacija (158) 14.2 Nalaženje odziva rednog RLC kola bez početne energije pri proizvoljnoj eksitaciji (158) 14.2.1 Direktna primjena Furijeove transformacije u *i*–formulaciji (158) 14.2.2 Direktna primjena Furijeove transformacije u *q*–formulaciji (159) 14.3 Primjena Furijeove transformacije za nalaženje odziva u ustaljenom režimu (164) 14.4 Primjena Furijeove transformacije u kolima sa početnom energijom (165) 14.5 Primjena Furijeove transformacije u analizi složenih kola (167)

Literatura 171

Indeks pojmova 175

PREDGOVOR

Krajem 20-ih godina prošlog vijeka, veliki engleski teorijski fizičar, nobelovac Pol Dirak je, radeći u oblasti kvantne mehanike (vidi njegovu klasičnu monografiju [1]), prvi put uveo, i uspješno koristio, tzv. δ funkciju, sa sledećim svojstvima

$$\delta(x) = 0, x \neq 0, \delta(0) = +\infty \tag{i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1, \tag{ii}$$

ili, opštije,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0). \tag{ii'}$$

Sa matematičke tačke gledišta, ova definicija je lišena smisla, jer su svojstva (i) i (ii), odn. (ii′) kontradiktorna. Ovo je pobudilo mnoge matematičare da počnu da tragaju za, matematički, korektnom definicijom δ funkcije, njenih izvoda i, uopšte, onog što sada nazivamo uopštenom funkcijom. Tu treba istaći Ž. Adamara, S. Bohnera i, posebno, ruskog matematičara S. L. Soboljeva, koji je u 30-im godinama uveo tzv. uopštene izvode i uspješno ih primjenjivao u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina. U godinama poslije II Svjetskog rata, francuski matematičar Loran Švarc, oslanjajući se na prethodno izgrađenu teoriju lokalno konveksnih topoloških vektorskih prostora, je nizom radova uspio da sazda matematički strogu teoriju uopštenih funkcija (koje je

nazvao distribucijama), i koju je izložio u svojoj poznatoj monografiji [2]. Za svoje radove u ovoj oblasti Švarc je 1954. god. dobio Fildsovu medalju, najveće matematičko priznanje. Osnovna njegova ideja je bila da se uopštena funkcija ne definiše kao obična funkcija, već kao tzv. funkcional (vidi Glavu 1). Poslije ovog, uslijedio je period intenzivnog razvoja teorije uopštenih funkcija, prvenstveno za potrebe "čiste" matematike (posebno u oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina) i teorijske fizike (prvenstveno kvantne mehanike). Međutim, u današnje vrijeme primjena aparata uopštenih funkcija se proširila i na druge oblasti teorijske fizike, kao i na oblast tehnike, posebno elektrotehnike (teorija elektromagnetskog polja i teorija električnih kola).

Uopštene funkcije posjeduju niz značajnih svojstava, koja znatno proširuju mogućnosti klasične matematičke analize. Tako, naprimjer, uopštena funkcija je beskonačno diferencijabilna (u uopštenom smislu), što omogućava da se izbjegnu teškoće pri diferenciranju prekidnih (običnih) funkcija, ako se one posmatraju kao uopštene. Dalje, svaka uopštena funkcija ima Laplasovu i Furijeovu transformaciju, što omogućava širu primjenu ovih transformacija, posebno Furijeove. Poznato je, naime, da mnoge, za praksu važne (obične) funkcije (konstanta, polinom, trigonometrijske funkkcije itd.) nemaju Furijeovu transformaciju. Međutim, ako ove funkcije posmatramo kao uopštene, tada Furijeova transformacija dobija za njih puni smisao.

U ovoj knjizi su izloženi matematički osnovi teorije uopštenih funkcija sa primjenama u teoriji elektromagnetskog polja i teoriji električnih kola. U Glavi 1 je definisana uopštena funkcija i dati su primjeri najčešće korišćenih uopštenih funkcija. Takođe, definisane su dvije važne operacije nad uopštenim funkcijama – diferenciranje i konvolucija. Integralne transformacije uopštenih funkcija, Laplasova i Furijeova, su razmotrene u Glavi 2, a primjena uopštenih funkcija u teoriji diferencijalnih jednačina (običnih i parcijalnih) čini sadržaj Glave 3. Konačno, u Glavama 4 i 5 dati su primjeri primjene uopštenih funkcija u teoriji elektromagnetskog polja i teoriji električnih kola.

Knjiga sadrži 70-ak zadataka; za neke od njih su data uputstva za rješevanje. Većina zadataka je u formi "dokazati ...", tako da je rezultat već sadržan u postavci, za ostale dati su rezultati na kraju odgovarajuće glave.

Formule, slike i dodaci su numerisani prema glavama, a primjeri prema paragrafima, tako da, naprimjer, formula (1.24) je formula iz Glave 1, dodatak D2.1 je dodatak na kraju Glave 2, primjer 6.3 je primjer iz §6 ....

Nekoliko riječi povodom naslova knjige. U zapadnoj literaturi uopštene funkcije se nazivaju distribucijama (kako ih je nazvao L. Švarc); ovdje je prihvaćen termin iz ruske literature, iz dva razloga. Prvo, zato što će, vjerovatno, biti prijemčiviji za čitaoca. Drugo, uopštena funkcija se može, u određenom smislu (vidi Glavu 1), shvatiti kao granična vrijednost niza običnih funkcija; takođe, svaka (obična), dovoljno regularna funkcija se može posmatrati kao uopštena.

Za čitanje ove knjige nijesu neophodna neka specijalna predznanja koja izlaze iz okvira univerzitetskog matematičkog obrazovanja. Neke činjenice iz teorije funkcija kompleksne promjenljive su izložene u dodacima na kraju pojedinih glava, a čitalac se upućuje na odgovarajuće reference u vezi diferencijalnih jednačina, matematičke analize i teorije funkcija kompleksne promjenljive.

Autor se nada da će knjiga biti od koristi studentima starijih godina matematike, fizike i elektrotehnike, kao i svima onima koji se bave teorijskim aspektima fizike i elektrotehnike.

Autor izražava srdačnu zahvalnost recenzentima knjige Milojici Jaćimoviću, redovnom profesoru PMF-a u Podgorici i redovnom članu Crnogorske akademije nauka i umjetnosti i Branimiru Reljinu, redovnom profesoru ETF-a u Beogradu. Oni su pregledali rukopis knjige i dali niz korisnih sugestija.

Izuzetnu zahvalnost autor duguje Kompaniji Čikom - informatički inženjering iz Podgorice koja je izrazila veliko razumijevanje da finansijski podrži štampanje ove knjige.

April 2019. godine A u t o r