Предговор

У свету у ком се технологија непрестано развија, разумевање сигнала и система постаје кључно за студенте рачунарства. Овај уџбеник је дизајниран да служи као мост између теоретских основа и практичне примене, обогаћен примерима у MATLAB-у. Наш циљ је да вам омогућимо да не само разумете основне концепте, већ и да их примените на реалне проблеме. Кроз детаљно објашњене примере и вежбе, овај уџбеник ће вас опремити знањем потребним за успех у свету рачунарства. Верујемо да ће интеграција MATLAB примера значајно побољшати ваше разумевање и способност анализе и дизајна различитих система. Надамо се да ће вам овај уџбеник послужити као вредан ресурс у вашем образовању и будућим инжењерским изазовима. Добро дошли у узбудљив свет сигнала и система!

Садржај

Предговор 3
Листа скраћеница 9
1. Увод у сигнале 11
1.1. Дефиниција сигнала 11
1.2. Класификација сигнала 12
1.3. Основни континуални сигнали 17
1.3.1. Јединична одскочна функција 17
1.3.2. Јединични импулс (Диракова делта функција) 19
1.3.3. Поворка Диракових импулса 21
1.3.4. Експоненцијални сигнал 22
1.3.5. Синусоидални сигнал 22
1.3.6. Јединична синк функција 23
1.4. Основни дискретни сигнали 24
1.4.1. Дискретна јединична одскочна функција 25
1.4.2. Дискретни јединични импулс 25
1.4.3. Експоненцијални сигнал 27
1.4.4. Синусоидалан сигнал 28
1.5. Основне операције над континуалним сигналима 31
1.5.1. Кашњење у времену 31
1.5.2. Рефлексија сигнала у времену 32
1.5.3. Скалирање времена 32
1.5.4. Симетрија сигнала 34
1.5.5. Конволуција сигнала 35
1.5.6. Корелација континуалних сигнала 39
1.6. Основне операције над дискретним сигналима 42
1.6.1. Померање сигнала 42
1.6.2. Инверзија независне променљиве 43
1.6.3. Скалирање времена 44
1.6.4. Особина симетрије 48
1.6.5. Дискретна конволуција 48
1.6.6. Корелација дискретних сигнала 53
1.7. Енергија и снага сигнала 55

2. Анализа сигнала у фреквенцијском домену 57
2.1. Фуријеов ред 57
2.1.1. Спектар периодичног сигнала 61
2.1.2. Услови конвергенције Фуријеовог реда 63
2.1.3. Примери Фуријеовог реда тригонометријских сигнала 63
2.2. Фуријеова трансформација 63
2.2.1. Пример 65
2.2.2. Услови за конвергенцију Фуријеове трансформације 67
2.2.3. Фуријеова трансформација јединичне импулске функције 68
2.2.4. Пример Фуријеове трансформације каузалног експоненцијалног сигнала 68
2.2.5. Дуалност Фуријеове трансформације 71
2.2.6. Фуријеова трансформација карактеристичних сигнала 72
2.2.7. Примене и особине Фуријеове трансформације 75
2.3. Одабирање сигнала у светлу Фуријеове трансформације 85
2.3.1. Одабирање 85
2.3.2. Теорема одабирања 89
2.4. Фреквенцијски одзив LTI система 89
2.4.1. Анализа LTI система 91
2.5. Филтрација сигнала 92
2.5.1. Пример филтрирања: избегавање преклапања код одабирања 95
3. Лапласова трансформација 97
3.1. Дефиниција LT 97
3.1.1. Пример израчунавања Лапласове трансформације 97
3.2. Област конвергенције Лапласове трансформације 98
3.2.1. Нуле и полови LT 98
3.2.2. Примери за вежбу 101
3.3. Инверзна Лапласова трансформација 102
3.4. Особине Лапласове трансформације 102
3.4.1. Линеарност 102
3.4.2. Померање у времену 103
3.4.3. Модулација 103
3.4.4. Скалирање 104
3.4.5. Диференцирање и интеграљење 104
3.4.6. Конволуција сигнала 105
3.4.7. Табела Лапласових трансформација често коришћених сигнала 106

3.5. Функција преноса система и једнострана Лапласова трансформација 107
3.5.1. Пример – одређивање функције преноса и одзива 107
3.5.2. Каузални и антикаузални системи 108
3.5.3. Стабилност система 108
3.6. Структурни блок дијаграми система 111
3.6.1. Паралелна веза два система 111
3.6.2. Редна веза два система 112
3.6.3. Повратна спрега 112
3.7. Унилатерална (једнострана) Лапласова трансформација 114
3.7.1. Особине једностране Лапласове трансформације 115
3.7.2. Разлика – стабилност 115
3.7.3. Граничне теореме 116
3.8. Примена унилатералне Лапласове трансформације 118
3.8.1. Примена за налажење одзива линеарних система 118
3.8.2. Примена Лапласове трансформације за решавање диференцијалних једначина 121
3.8.3. Представљање система преко матрице стања 123
3.8.4. Бодеови дијаграми 127
4. Z трансформација и инверзна Z трансформација 129
4.1. Дефиниција Z трансформације 129
4.1.1. Услови конвергенције Z трансформације 130
4.1.2. Област конвергенције 134
4.2. Инверзна Z трансформација 134
4.2.1. Развијање у потенцијални ред 135
4.2.2. Свођење на табличне облике 136
4.3. Особине Z трансформације 136
4.3.1. Линеарност 136
4.3.2. Померање у времену 136
4.3.3. Модулација 137
4.3.4. Инверзија времена 137
4.3.5. Конволуција сигнала 137
4.4. Функција дискретног преноса система и једнострана Z трансформација 138
4.4.1. Функција дискретног преноса система 138
4.4.2. Фреквенцијски одзив дискретног система 138
4.4.3. Каузалност и стабилност система 139

5. Фуријеова трансформација дискретних сигнала 141
5.1. Особине DTFT 141
5.1.1. Линеарност 141
5.1.2. Кашњење у временском домену 142
5.1.3. Особина модулације 142
5.1.4. Особина конволуције 143
5.1.5. Симетрија спектра 143
5.2. Фуријеова трансформација типичних дискретних сигнала 143
5.2.1. Фуријеова трансформација јединичног импулса 143
5.2.2. Спектар дискретног експоненцијалног сигнала 144
5.3. Одзив дискретног ЛТИ система 146
5.4. Парсевалова теорема за дискретне сигнале 147
5.5. Дискретна Фуријеова трансформација 147
5.5.1. Инверзна дискретна Фуријеова трансформација 148
5.5.2. Брза Фуријеова трансформација 148
5.5.3. Рачунање ФФТ-а у Матлабу 149
5.5.4. Генерализација анализе спектра сигнала 150
Коришћена литература 153

Листа скраћеница

CT	Continuous-time
BIBO	Bounded Input, Bounded Output
BLT	Bilateralna Laplasova transformacija
DNA	Deoxyribonucleic Acid
DFT	Discrete Fourier Transform
DTFT	Discrete Time Fourier Transform
DSP	Digital Signal Processing
DT	Descrete-time
FFT	Fast Fourier Transform
IDTFT	Inverse Discrete Time Fourier Transform
LTI	Linear Time Invariant
ECG	Electrocardiogram
RLC	Resistance (R), Inductance (L), Capacitance (C)
ROC	Region of Convergence
ULT	Unilateralna Laplasova transformacija
UV	Ultra Violet
БФТ	Брза Фуријеова трансформација
ДФТ	Дискретна Фуријеова Трансформација
ИБФТ	Инверзна брза Фуријеова трансформација
ЛВИ	Линеарни временски инваријантни

1. Увод у сигнале

На почетку пута у обраду сигнала дефинишемо основне појмове и дефиниције. У овом поглављу дефинисани су сигнали. После тога видећемо основне типове сигнала, и класификацију сигнала. Представићемо и основне операције над сигналима. Овде можете пронаћи мноштво илустративних примера у познатим софтверским пакетима укључујући Матлаб, то јест Octave. Да бисте наставили читање овог поглавља, потребно је основно разумевање диференцијалног рачуна, граничних вредности, и наравно одређено знање програмирања.

1.1. Дефиниција сигнала

Обрада сигнала користи се у многим областима инжењерства да опише врло различите феномене. Због тога је битно да дефинишемо сигнал на одговарајући начин како бисмо могли да га мењамо, обрађујемо и манипулишемо.

Сигнал се најчешће дефинише као функција једне или више независних променљивих која преноси неку информацију. Независна променљива је најчешће време, врло често простор, као што ће бити приказано у примерима. Често ћемо за независну променљиву рећи да је време, и да је сигнал у временском домену, понекад и кад независна променљива није време. Сигнал можемо да дефинишемо на следећи начин:

Сигнал је временски променљив физички феномен који носи неку информацију.

Морамо истаћи следеће чињенице:

– Сигнал је функција независне променљиве, што води до математичке представе сигнала. Ово такође значи да сигналом можемо манипулисати користећи познату математичку теорију.
– Независна променљива може бити време или простор. Многе физичке величине се мењају у времену, на пример напон телекомуникационих сигнала, ниво звука, температура, курс валуте итд. Постоје физички феномени који се мењају у простору, рецимо слика, ДНК низ, надморска висина итд.
– Сигнал носи неку информацију посматрачу. Посматрачи могу забележити вредности сигнала и касније га обрадити да би дошли до важних и корисних информација.

Упркос различитостима, сигнали имају много заједничких особина, тако да могу бити обрађени на сличан начин. Основа обраде сигнала је скуп математичких једначина и математички модел. Физички феномени и вредности које представљају сигнал могу бити врло сложени. У таквим ситуацијама, сигнали се представљају математичким моделом који апроксимира појаву из стварног

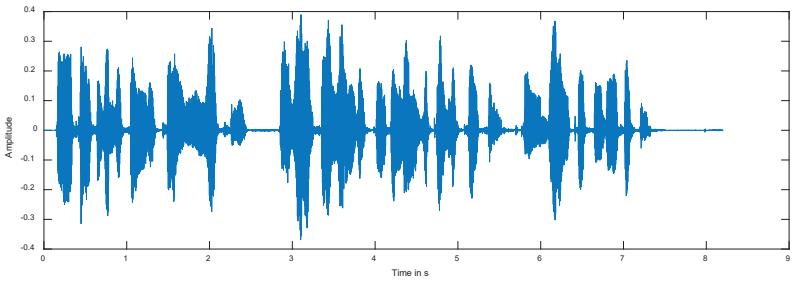
света. У многим применама, сензори се користе да претворе физичку величину у електрични напон тако да се анализа и обрада сигнала своде на електричне сигнале. Данас се сензори, као што су микрофони и термометри, широко користе у разним применама да генеришу сигнале који се обрађују.

1.2. Класификација сигнала

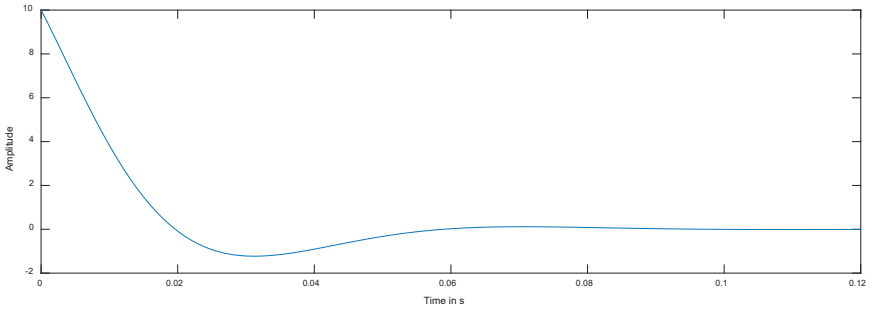
У наставку правимо класификацију сигнала засновану на типу и броју независних променљивих. Постоји велики број сигнала за које је независна променљива време. Међутим, веома често у пракси, математичке трансформације се користе да пребаце обраду сигнала из временског у фреквенцијски домен.

Сигнали могу бити класификовани на основу неколико особина. Прво ћемо гледати сигнал у временском домену и како је дефинисана независна променљива. Иако користимо израз временски домен, независна променљива може бити просторна, у том случају то зовемо просторни домен. Међутим, врло је уобичајено да користимо појам временски домен чак и ако независна променљива није време. Постоје две основне класе сигнала у односу на независну променљиву: континуални и дискретни сигнали.

Континуални сигнали (Continuous time – CT) су дефинисани у сваком тренутку времена. То значи да је независна променљива континуална. Ово је врло широка класа сигнала, јер већину природних феномена чине они који су континуални. Сигнал означавамо са $x(t)$, где је t независна променљива. На пример, људски глас, звани говор у обради сигнала, је сигнал који представља промене вредности притиска на мембрану микрофона. Ове промене ваздушног притиска микрофон претвара у електрични напон. Говорни сигнал се обично скалира у опсег [-1,1]. Слика 1 приказује 8 секунди говорног сигнала. Можемо да видимо да постоји нека врста периодичности у сигналу, која је проузрокована периодичношћу ваздуха у говорном тракту човека. На исти начин можемо представити вредност струје у RLC колу са константним напонским генератором, види слику 2.



Слика 1. Континуални говорни сигнал.



Слика 2. Одзив RLC кола у временском домену.

Матлаб пример 1: Код који генрише слику 1

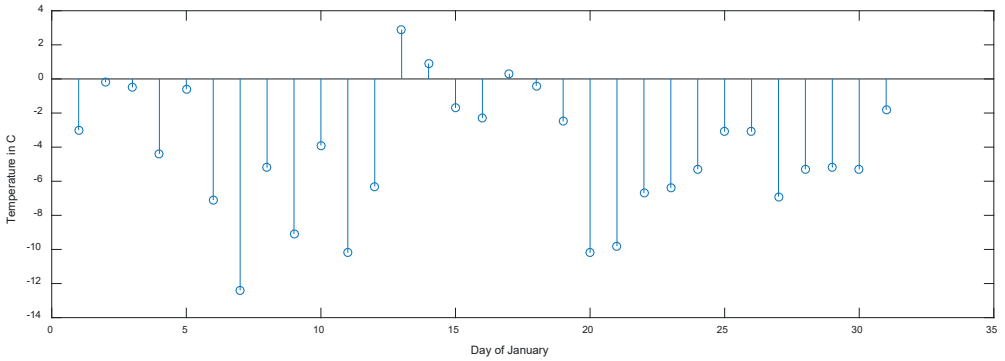
```
% Unesite putanju do vašeg WAV fajla
wavFilePath = 'putanja/do/vasheg/fajla.wav';

% Učitavanje WAV fajla
[y, Fs] = audioread(wavFilePath);

% Dužina signala
t = (0:length(y)-1) / Fs;

% Crtanje vremenskog dijagrama
figure;
plot(t, y);
title('Vremenski dijagram WAV fajla');
xlabel('Vreme (s)');
ylabel('Amplituda');
grid on;
```

Дискретни сигнал (енг. discrete time –DT) сигнал је дефинисан само у одређеним, дискретним временском тренуцима. Дискретни сигнал означавамо са $x(n)$, или $x[n]$ у неким изворима, где је n индекс одбирка. Дискретни сигнали се добијају мерењем физичких феномена из стварног света у једнаким временским интервалима. На пример, метеоролошки подаци, као што су температура, влажност, брзина ветра, УВ индекс итд, за неку локацији у оквиру аутоматске метео станице се бележе сваких пет минута. Слика 3 даје средњу дневну температуру по данима за град Шабац у јануару 2016. године. Слика илуструје типичан график дискретног сигнала где је на x оси индекс одбирка, а на y оси вредност. Ако детаљније анализирамо и проучавамо метеорлошке податке у дужем временском интервалу, можемо да уочимо климатске трендове, периодичне ефекте, а можемо да развијемо и алгоритме који врше предикцију времена. Ова анализа подразумева филтрацију сигнала, спектралну анализу, што је објашњено касније.



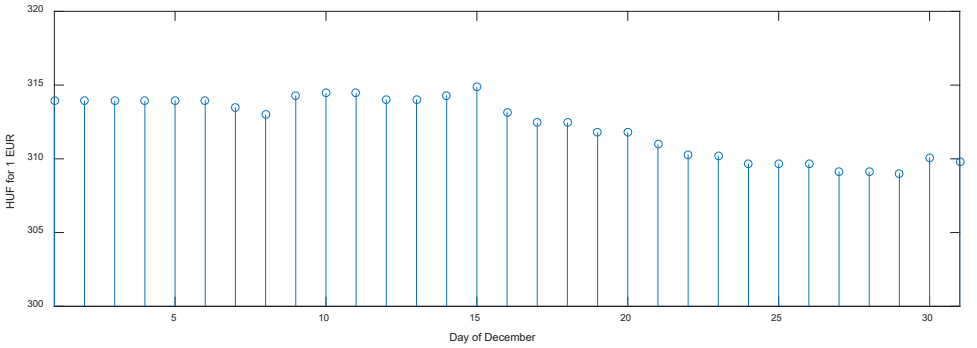
Слика 3. Средња дневна температура у јануару 2016., град Шабац.

Дискретни сигнали могу да се добију као резултат методе аквизиције, прикупљања података, који је дискретан по својој природи, или дискретизацијом континуалних сигнала.

Слика 4 приказује дневне вредности мађарске форинте у односу на евро.

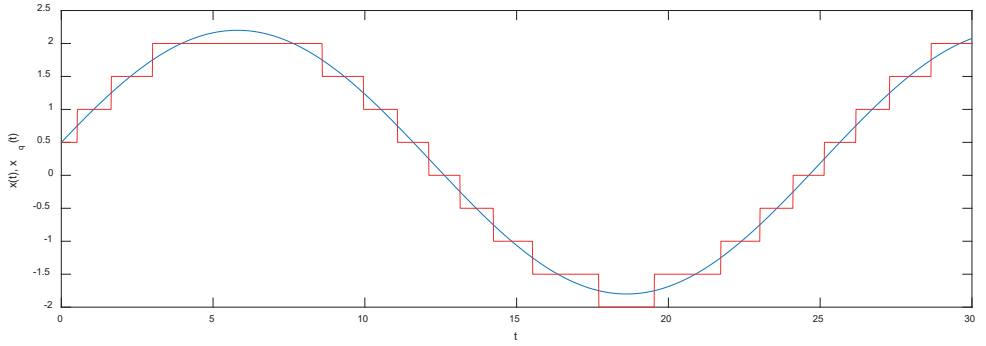
Дискретизација подразумева да се континуални сигнали претворе у дискретне да би се на њима примениле методе дигиталне обраде сигнала (енг. Digital Signal Processing – DSP), што је уобичајено у модерним дигиталним системима. У процесу дискретизације бележе се вредности континуланог сигнала у правилним временским размацима, добијене вредности се зову одбирци.

Овај процес добијања одбирака зове се одабирање, или узорковање (енг. sampling). Време између одбирака зове се период одабирања *T*, а реципрочна вредност периода одабирања је фреквенција одабирања *F*. Касније ћемо детаљније да обрадимо одабирање и видимо услове за фреквенцију одабирања.

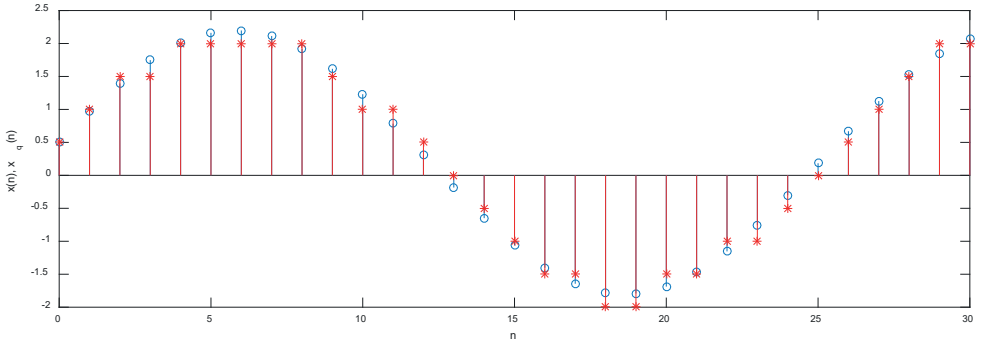


Слика 4. Курс мађарске форинте у односу на евро током децембра 2016., подаци су узети са сајта Европске централне банке https://www.ecb.europa.eu.

Код *сигнала континулане амплитуде*, амплитуда сигнала може да има било коју вредност из неког континуалног распона, као што је то приказано у примерима. Сигнали дискретне амплитуде могу да имају вредност само из одређеног скупа вредности. Овакви сигнали се добијају у процесу квантизације сигнала континуалне амплитуде, заокруживањем вредности сваког одбирка на неку вредност из датог скупа. Слика 5 приказује континуалан сигнал континуалне амплитуде, плава линија, који је претворен у континуалан сигнал дискретне амплитуде, црвена линија. Процес квантизације дискретног сигнала је приказан на слици 6. Континуални сигнали континулане амплитуде зову се аналогни сигнали, као што је приказано на слици 1. Назив аналогни долази од тога што су ти сигнали аналогни физичкој величини коју представљају.



Слика 5. Конитинуалан синусоидалан сигнал континулане амплитуде – плаво, и дискретне амплитуде – црвено.



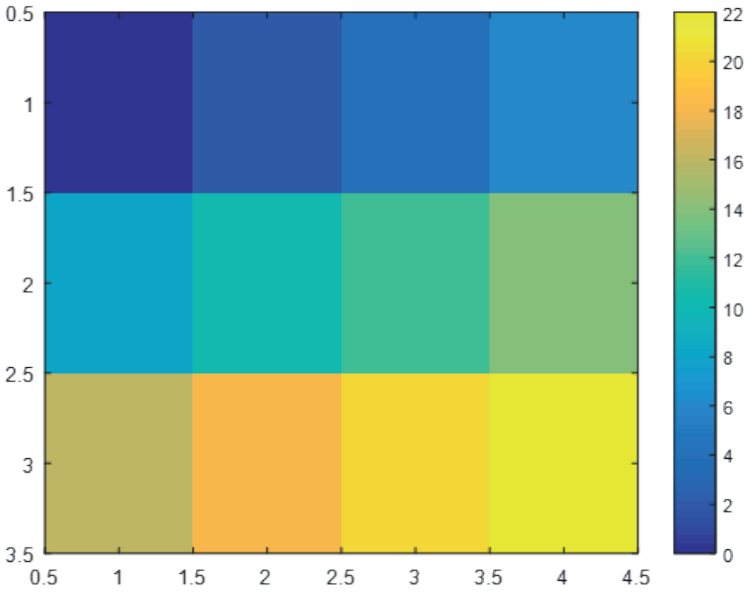
Слика 6. Дискретни синусоидални сигнал – плаво, и дискретни сигнал дискретне амплитуде (дигитални сигнал) – црвено, добијен квантизацијом.

Дигитални сигнал је посебна врста сигнала дискретног у времену са дискретном амплитудом. У дигиталним системима, као што су дигитални рачунари и

други системи који се користе за дигиталну обраду сигнала, увелико се користе дигитални сигнали који су добијени дискретизацијом и квантизацијом аналогних сигнала. Дискретизација по времену, то јест одабирање, ради се због тога што рачунари могу да обрађују само одбирке сигнала дате на растојању које је једнако периоду одабирања. Квантизација амлитуде се ради да бисмо могли да ускладиштимо одбирке сигнала у меморију. Квантизација је повезана са прецизношћу која је одређена бројем бита по одбирку, што је дужина речи (енг. *wordlength*). Број различитих вредности амплитуде, то јест нивоа амплитуде, одређен је дужином речи. Дигитални сигнал може да се представи низом импулса различите дужине, или амплитуде у складу са кодовањем. У случају кад дигитални сигнал има само два нивоа, онда такав сигнал зовемо бинарним сигналом. Процес дигитализације, који се састоји од дискретизације по независној променљивој и квантизације, је неповратан због квантизације. Међутим, под одређеним условима, дигитални сигнал може да се реконструише у почетни аналогни сигнал за репродукцију.

Дигитални сигнали су у широкој употреби пре свега због употребе модерних дигиталних система, који обављају дигиталну обраду сигнала. Дигитални сигнали су по својој природи отпорни на шум, због коначног скупа могућих вредности. Одбирци сигнала се лако детектују и отклања се шум коришћењем релативно лаких начина као што је поређење с прагом.

Димензионалност сигнала је одређена бројем независних променљивих. Сви сигнали приказани на сликама 1-6 су једнодимензионални, 1-Д, јер имају једну независну променљиву која је време. Сигнал може да буде функција две или више независних променљивих. Најбољи пример дводимензионалног сигнала је дигитална слика. Дискретна слика има две независне променљиве које представљају просторне координате пиксела који има одређени скуп вредности одређен бројем бита по пикселу. Другим речима дигитална слика је дводимензионална матрица пиксела $x(n,m)$. Вредност пиксела $x(n,m)$ зависи од позиције која је одређена са два индекса n и m, који представљају врсту и колону слике. Слика 7 илуструје дигитлану слику ниске резолуције, тј. са малим бројем пиксела по ширини и висини, како бисмо уочили појединачне пикселе. Касније на овом предмету даћемо приниципе обраде слике. Дигитални видео је пример тродимензионалног сигнала, јер је видео низ дводимензионалних слика у времену. У медицинским применама понекад користимо 4-Д сигнале, јер понекад је потребна 3-Д слика која се посматра у времену.



Слика 7. Илустрација дводимензионалног сигнала, дигиталне слике резолуције 3*4.

Сигнали се често представљају математичким моделима, као што је већ речено. Сигнали који су одређени, детерминисани, математичким једначинама, зову се *детерминистички сигнали*. Међутим, многи физички феномени не могу бити представљени математичким једначинама, и вредности сигнала добијених на основу физичких феномена су случајне. Вредности ових сигнала могу бити одређене на основу статистичких особина сигнала. Овакви сигнали се зову стохастички или случајни сигнали. Статистичке особине ових сигнала су средња вредност, стандардна девијација, функција густине вероватноће итд. Примери случајних сигнала су дигитални звук који смо већ приказали, или индекс берзе, курс валуте, филм итд.

1.3. Основни континуални сигнали

У овом поглављу проучавамо основне континулане сигнале који се моделују математичким формулама. Ови сигнали су значајни да моделујемо сигнале из стварног света, генерално методе обраде сигнала.

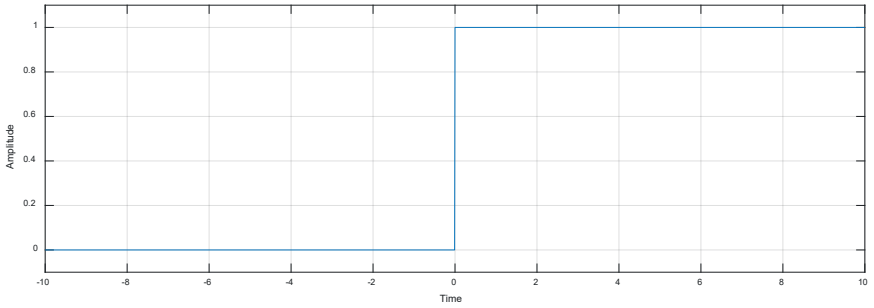
1.3.1. Јединична одскочна функција

Јединична одскочна функција има особину да мења вредност са вредности 0 на вредност 1 у временском тренутку t=0. Ова функција моделује сигнал који

се добија на излазу идеалног прекидача. Јединична функција се означава са $u(t)$ и дефинише као:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Јединична одскочна функција је илустрована на слици 8. Обратите пажњу на то да континуални сигнал може да има прекиде, то значи да је независна променљива континуална. Степ функција је пример континуалног сигнала са прекидом у тачки t=0. У овој тачки одскочна функција није дефинисана, међутим најчешће се узима да је $u(0)$=1.

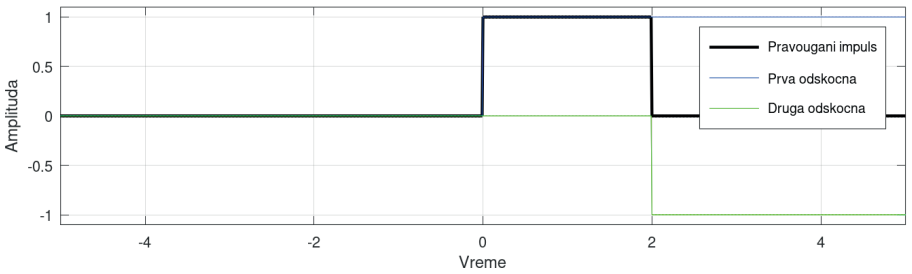


Слика 8. Континуална одскочна функција.

Одскочна функција је врло корисна да представимо неке друге сигнале. На пример, правоугаони импулс трајања T може да се дефинише као разлика две одскочне функције међусобно померене за T:

$$p(t) = u(t) - u(t - T) \quad (2)$$

Овде $u(t\text{-}T)$ представља одскочну функцију која је померена, закашњена, за T. Овакав начин генерисања правоугаоног импулса је илустрован на слици 9. Јединична одскочна функција се користи и за дефинисање каузалних сигнала, као што ће бити приказано касније.



Слика 9. Правоугони импулс одређен као разлика две одскочне функције.

Матлаб пример 2: Код уз слику 9

```
t = -5:0.01:5;  % vremenski interval

% Parametri za stepenske funkcije
sirina = 2;      % širina impulsa
pomeraj1 = 0;    % pomeraj prve funkcije
pomeraj2 = pomeraj1 + širina;    % pomeraj druge funkcije

% Generisanje step funkcija korišćenjem logičkih operacija
step_funkcija_1 = (t >= pomeraj1);
step_funkcija_2 = (t >= pomeraj2);

% Generisanje pravougaonog impulsa sabiranjem step funkcija
pravougaoni_impuls = step_funkcija_1 - step_funkcija_2;

% Vizualizacija
figure;
plot(t, pravougaoni_impuls, 'k', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(t, step_funkcija_1, 'b' )
plot(t, -step_funkcija_2, 'g' )
legend('Pravougani impuls', 'Prva odskocna', 'Druga odskocna')
xlabel('Vreme');
ylabel('Amplituda');
grid on;
axis([-5 5 -1.1 1.1])
```

1.3.2. Јединични импулс (Диракова делта функција)

Јединични импулс или како се често зове Диракова делта функција, је врло важна функција за математичке моделе у обради сигнала. Јединични импулс се дефинише преко следећа три услова:

$$\delta(t) = 0 \text{ за } t \neq 0 \tag{3}$$

$$\delta(t) \text{ није дефинисана за } t=0, \text{ и} \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{5}$$

Другим речима јединични импулс није дефинисан у t=0, али можемо да замислимо да има изузетно велику амплитуду, и врло кратко трајање. Услов дат једначином (5) каже да је површина испод импулса једнака 1.

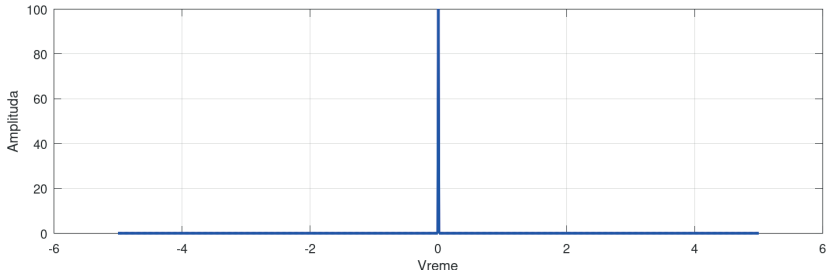
Извод јединичне импулсне функције по времену је јединична одскочна функција:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \tag{6}$$

Односно јединична одскочна функција може се добити интегралом јединичног импулса:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau. \tag{7}$$

Апроксимативни график Диракове делта функције дат је на слици 10, где смо узели у обзир да је амплитуда импулса врло велика, трајање мало, а укупна површина 1. Особина скалирања Дираковог импулса може се анализирати одређивањем извода скалиране јединичне одскочне функције.



Слика 10. Дираков импулс.

Матлаб пример 3: Апроксимација Дираковог импулса

```
t = -5:0.01:5;  % vremenski interval

% Parametri za aproksimaciju Dirakovog impulsa
sirina = 0.01;   % širina aproksimacije

% Aproksimacija Dirakovog impulsa
dirac_aproksimacija = (1/sirina)*(abs(t) <= sirina/2);

% Vizualizacija
figure;
plot(t, dirac_aproksimacija, 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Vreme');
ylabel('Amplituda');
grid on;
```

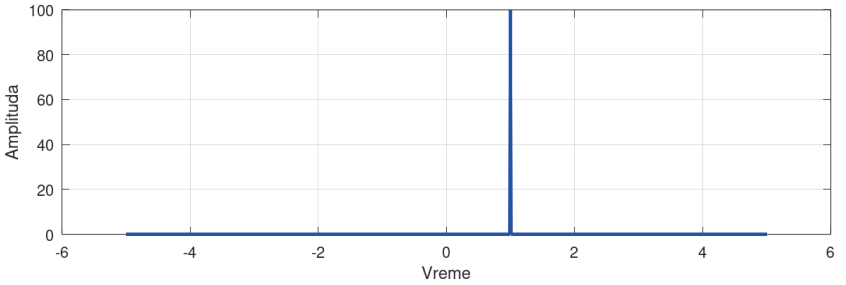
Ако се неки сигнал $x(t)$ помножи јединичним импулсом који је померен у времену (закашњен) за t_0, добијамо

$$y(t) = x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0), \tag{8}$$

што значи да је $y(t)$ Дираков импулс скалиран са $x(t_0)$ који се појављује у t_0, слика 11. Врло важна особина Дираковог импулса је особина одабирања:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0). \quad (9)$$

Видимо да можемо да одредимо вредност сигнала $x(t_0)$ интегралећи производ функције и помереног Дираковог импулса.



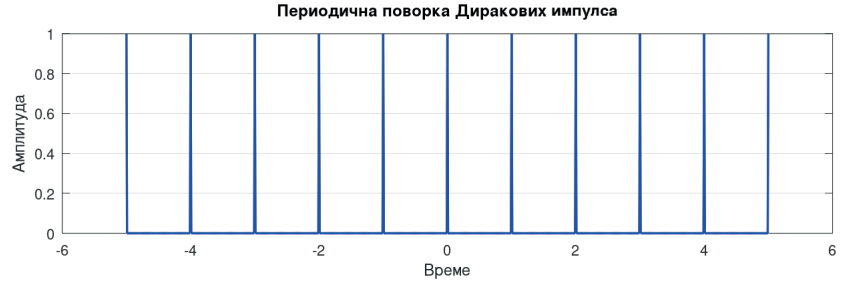
Слика 11. Померен Дираков импулс.

1.3.3. Поворка Диракових импулса

Функција која се добија као сума померених јединичних импулса зове се поворка Диракових импулса, или Дираков чешаљ, понекад и функција одабирања јер служи за моделовање процеса одабирања. Поворка Диракових импулса изражава се као:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (10)$$

где је T растојање између импулса, и самим тим период ове функције. Ова функција служи у математичком моделовању процеса одабирања.



Слика 12. Периодична поворка Диракових импулса периоде T=1.

Матлаб пример 4: Код који илуструје перидичну поворку Диракових импулса

```
% Параметри
T = 1; % Период сигнала
t = -5:0.01:5; % Временски опсег
```