Антоније Р. Ђорђевић

# ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

## 2. део

## Сталне струје

Академска мисао
Универзитет у Београду
Електротехнички факултет
Београд, 2016.

Антоније Р. Ђорђевић

**ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ**

**2. део**

Сталне струје

Пето издање

Рецензенти

мр Градимир Божиловић

др Владимир Петровић

др Дејан Тошић

Издаје и штампа

АКАДЕМСКА МИСАО

Београд

Дизајн корица

др Милица Ђурић-Јовичић

Тираж 300 примерака

ISBN 978-86-7466-629-6

НАПОМЕНА: Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге у целини или у деловима није дозвољено без претходне изричите сагласности и писменог одобрења издавача.

# Предговор

Овај уџбеник је произашао из материјала за предавања из предмета Основи електротехнике која је аутор држао на Електротехничком факултету Универзитета у Београду од школске 1987/88. године до 2002/03. године, као и из предмета Основи електротехнике 1 и 2 и Практикум из Основа електротехнике 1 и 2, произашлих из Основа електротехнике, које држи од школске 2003/04. године. Те, нове, предмете је аутор оформио сагласно актуелним потребама наставе из ове области на Електротехничком факултету у Београду. Предмети су конципирани тако да, на савремен начин, обрађују материју која је неопходан основ за предмете електротехничког садржаја на старијим годинама на свим одсецима Факултета.

Предмет Основи електротехнике има на Електротехничком факултету у Београду традицију дугу пола века. Првобитни курс предмета је креирао професор Миодраг Ранојевић. Ревидиран и модернизован курс је на Електротехнички факултет у Београду увео академик професор др Јован Суратка, паралелно са сличним курсом који је на Факултет техничких наука у Новом Саду увео академик професор др Бранко Поповић.

Градиво предмета Основа електротехнике 1 и 2, као и одговарајућих практикума, подељено је у четири области: електростатичка поља, поља и кола сталних струја, магнетска поља (стална и променљива) и променљиве електричне струје. Сходно томе је и уџбеник „Основи електротехнике“ подељен у четири одговарајућа дела. По редоследу издавања, Сталне струје излазе као други део, после Кола променљивих струја.

Осим градива које се предаје у оквиру предмета Основи електротехнике 1, овај уџбеник садржи додатни материјал који је означен испрекиданим линијама на левој и десној маргини, а који се може изоставити при читању без губитка континуитета. Део тога материјала се обрађује у предметима Практикум из Основа електротехнике 1, Практикум из Основа електротехнике 2 и Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике. Означени материјал омогућиће заинтересованом читаоцу проширивање знања из тих области.

Аутор се посебно захваљује свом дугогодишњем сараднику и прегаоцу на предмету Основи електротехнике, мр инж. Градимиру Божиловићу, на великој помоћи и подршци током израде овог уџбеника. Аутор се такође захваљује професору др Предрагу Пејовићу и својим блиским сарадницима, ванредном професору др инж. Владимиру Петровићу, доценту др инж. Дејану Тошићу и асистенту-приправнику мр инж. Драгану Олћану, на корисним сугестијама и примедбама, као и студентима Милици Ђурић и Немањи Огњановићу, који су помогли у припреми и техничкој обради рукописа.

Београд, јануара 2006. Аутор

# Предговор трећем издању

У овом издању су исправљене уочене грешке. Аутор се захваљује асистенту Слободану Савићу који је детаљно прочитао уџбеник и указао на неке од тих грешака.

Београд, септембра 2012. Аутор

# Садржај

Страна
2. Сталне струје ... 1
2.1. Увод ... 1
2.2. Поља сталних струја ... 2
2.2.1. Увод ... 2
2.2.2. Основне једначине електростатике ... 2
2.2.3. Изолатори и проводници ... 3
2.2.4. Електрична струја ... 5
2.2.5. Вектор густине струје ... 7
2.2.6. Специфична проводност и специфична отпорност ... 8
2.2.7. Џулови губици ... 11
2.2.8. Побудно електрично поље и генератори ... 12
Генератор у празном ходу ... 13
Генератор у проводној средини ... 15
Снаге ... 18
Струјно коло ... 19
2.2.9. Јачина струје и расподеле струје ... 21
Запреминске струје ... 22
Површинске струје ... 24
Линијске струје ... 26
Преглед расподела наелектрисања и расподела струје ... 28
2.2.10. Једначине стационарног струјног поља ... 29
Једначина континуитета ... 29
Закон циркулације вектора јачине електричног поља ... 31
Потпуни систем једначина стационарног струјног поља ... 33
Гранични услови ... 35
2.2.11. Анализа стационарних струјних поља ... 37
Проводници за повезивање ... 37
Поље у отпорницима ... 39
Снага отпорника ... 49
Поље у генераторима ... 51
Снага генератора ... 52
2.3. Кола сталних струја ... 55
2.3.1. Електричне шеме ... 58
Отпорници ... 58
Реални напонски генератори ... 59
Проводници за повезивање ... 60
Означавање напона и струја ... 61
Усклађени и неусклађени референтни смерови напона и струје ... 62
2.3.2. Релације између напона и струје отпорника ... 63

2.3.3. Релације између напона и струје реалног напонског генератора ... 64
2.3.4. Снаге елемената кола ... 66
2.3.5. Кирхофови закони ... 69
Први Кирхофов закон ... 69
Други Кирхофов закон ... 71
2.3.6. Редна и паралелна веза два отпорника ... 76
Редна веза ... 76
Паралелна веза ... 79
2.3.7. Просто коло са једним напонским генератором ... 80
2.3.8. Идеални напонски генератор ... 83
Еквивалентна шема реалног напонског генератора ... 85
Сумирање напона на идеалним напонским генераторима и отпорницима ... 87
Просто коло са више напонских генератора и отпорника ... 90
2.3.9. Идеални струјни генератор ... 92
Реални струјни генератор ... 96
Трансфигурације реалних генератора ... 96
2.4. Сложена кола сталних струја ... 97
2.4.1. Елементи кола сталних струја ... 102
Идеални напонски генератор ... 102
Идеални струјни генератор ... 103
Отпорник ... 104
Кратак спој ... 105
Отворена веза ... 105
Прекидач ... 106
Преклопник ... 107
2.4.2. Решавање кола сталних струја ... 107
2.4.3. Граф кола ... 109
2.4.4. Кирхофови закони ... 112
Постављање једначина по првом Кирхофовом закону ... 113
Постављање једначина по другом Кирхофовом закону ... 116
Одређивање напона између две тачке ... 120
Табло систем једначина ... 120
Редуковани систем једначина ... 122
2.4.5. Метод контурних струја ... 127
2.4.6. Метод потенцијала чворова ... 132
2.4.7. Трансфигурације отпорничких мрежа ... 141
Редна веза отпорника ... 141
Паралелна веза отпорника ... 142
Мешовита веза отпорника ... 143
Еквиваленција трокраке звезде и троугла отпорника ... 144
2.5. Теореме кола сталних струја ... 149
2.5.1. Теореме линеарности ... 149
Метод пропорционалних величина ... 154
2.5.2. Теореме компензације ... 156
2.5.3. Тевененова и Нортонова теорема ... 162
2.5.4. Теореме реципроцитета ... 172
2.5.5. Теорема одржања снаге ... 174
2.5.6. Прилагођење по снази ... 176
2.5.7. Симетрија и теорема бисекције ... 180

2.6. Контролисани генератори ..... 186
2.7. Мреже са два приступа ..... 193
2.8. Кола са нелинеарним елементима ..... 203
2.9. Кола са кондензаторима ..... 220
Литература ..... 239

# 2. Сталне струје

## 2.1. Увод

У електростатици смо анализирали поље наелектрисања која су макроскопски непокретна у односу на посматрача. Међутим, у супстанци се наелектрисања стално крећу. На пример, електрони круже око језгара атома, а слободни носиоци у проводницима се крећу великим брзинама (термичко кретање). У електростатици смо сматрали да је брзина кретања наелектрисања, векторски усредњена у физички малој запремини, увек једнака нули. У овом делу уџбеника ћемо посматрати појаве када средња брзина кретања наелектрисања није једнака нули, односно када се носиоци наелектрисања организовано крећу. Такво кретање назива се електричном струјом.

Носиоци наелектрисања се могу организовано кретати у чврстим телима, течностима, гасовима и у вакууму. У овом уџбенику ћемо разматрати практично само струје у чврстим проводним телима (проводницима) јер су оне од највећег практичног интереса за електротехнику, али и најједноставније за анализу.

Постоје различити узроци организованог кретања наелектрисања у проводницима. У Основима електротехнике ћемо анализирати само струје које настају под дејством електричног поља. У овом делу уџбеника ћемо сматрати да се струје не мењају у функцији времена, односно да су сталне (стационарне). Такве струје се називају и једносмерним струјама. Променљиве струје ће бити предмет анализе у трећем и четвртом делу уџбеника.

Простор у коме постоје струје назива се струјним пољем. У електротехници су од посебног интереса поља која имају облик танких затворених струјних путева, а која се називају електричним колима. Стога ћемо највећу пажњу посветити анализи кола, а посебно методима ефикасног решавања сложених кола. Главни циљ је обезбеђивање основних знања неопходних за решавање многих конкретних проблема електротехничке струке, као и за разумевање рачунарских алата који се користе у инжењерској пракси.

# 2.2. Поља сталних струја

## 2.2.1. Увод

Анализа струјних поља је значајна за разумевање физичких појава везаних за сталне струје. Разматрајући струјна поља, сагледаћемо претпоставке и апроксимације које се примењују у анализи електричних кола, а из основних закона струјних поља извешћемо основне законе електричних кола (Кирхофове законе и Омов закон).

Анализа поља сталних струја се у великој мери заснива на истим или сличним једначинама и методима као анализа електростатичких поља. Стога ћемо најпре сумирати основне резултате електростатике, а затим прећи на анализу проводника и струја у њима.

## 2.2.2. Основне једначине електростатике

Теорија електростатичких поља се заснива на резултатима неколико основних експеримената.

Из прве групе експеримената следи Кулонов закон. Посматрајући електричну силу на пробно наелектрисање, дефинише се вектор јачине електричног поља (**E**). На основу резултата тих експеримената, констатовано је да важе линеарност и суперпозиција (за електростатичко поље у вакууму). Из Кулоновог закона се изводи закон циркулације вектора **E**, $\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$, где је $C$ произвољна контура (затворена линија) у електростатичком пољу[1]. Из Кулоновог закона се изводи и Гаусов закон (који важи за електростатичко поље у вакууму), $\oint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{\mathrm{u}\,S}}{\varepsilon_0}$, где је $S$ произвољна затворена површ, оријентисана, по договору, увек упоље, а $Q_{\mathrm{u}\,S}$ укупно наелектрисање[2] обухваћено том површи.

Из групе експеримената који се односе на електростатичко поље у присуству диелектрика (непроводних материјала) изведене су основне особине диелектрика. Формирани су веома поједностављени модели молекула и материјала у целини, који су довољно добри за већину инжењерских примена, односно за макроскопски ниво разматрања поља. Уведен је вектор поларизације (**P**) као величина која карактерише стање у поларизованом материјалу, уведен концепт везаних наелектрисања, а затим уведен вектор електричне индукције (**D**) дефиницоном релацијом $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$. Вектор **P** зависи од јачине електричног поља у материјалу, што се пише у облику $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$. Стога и вектор **D** зависи од вектора **E**, тј. $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$, а њихова веза зависи од особина

[1] Тај закон се може извести и из закона одржања рада и енергије, који је један од фундаменталних закона класичне физике.

[2] Збир позитивног и негативног наелектрисања, свако узето са својим знаком.