Антоније Р. Ђорђевић

ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

1. део

Електростатика

Академска мисао
Универзитет у Београду
Електротехнички факултет
Београд, 2016.

Антоније Р. Ђорђевић

ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

1. део

Електростатика

Пето издање

Рецензенти

мр Градимир Божиловић

др Бранко Колунџија

др Владимир Петровић

Издаје и штампа

АКАДЕМСКА МИСАО

Београд

Дизајн корица

др Милица Ђурић-Јовичић

Тираж 300 примерака

ISBN 978-86-7466-628-9

НАПОМЕНА: Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге у целини или у деловима није дозвољено без претходне изричите сагласности и писменог одобрења издавача.

Предговор

Овај уџбеник је произашао из материјала за предавања из предмета Основи електротехнике која је аутор држао на Електротехничком факултету Универзитета у Београду од школске 1987/88. године до 2002/03. године, као и из предмета Основи електротехнике 1 и 2 и Практикум из Основа електротехнике 1 и 2, произашлих из Основа електротехнике, које држи од школске 2003/04. године. Те, нове, предмете је аутор оформио сагласно актуелним потребама наставе из ове области на Електротехничком факултету у Београду. Предмети су конципирани тако да на савремен начин обрађују материју која је неопходан основ за предмете електротехничког садржаја на старијим годинама на свим одсецима Факултета.

Предмет Основи електротехнике има на Електротехничком факултету у Београду традицију дугу пола века. Првобитни курс предмета је креирао професор Миодраг Ранојевић. Ревидиран и модернизован курс је на Електротехнички факултет у Београду увео академик професор др Јован Суратка, паралелно са сличним курсом који је на Факултет техничких наука у Новом Саду увео академик професор др Бранко Поповић.

Градиво предмета Основа електротехнике 1 и 2, као и одговарајућих практикума, подељено је у четири области: електростатичка поља, поља и кола сталних струја, магнетска поља (стална и променљива) и променљиве електричне струје. Сходно томе је и уџбеник „Основи електротехнике“ подељен у четири одговарајућа дела. По редоследу издавања, Електростатика излази као трећи део, после Кола променљивих струја и Сталних струја.

Осим градива које се предаје у оквиру предмета Основи електротехнике 1, овај уџбеник садржи додатни материјал који је означен испрекиданим линијама на левој и десној маргини, а који се може изоставити при читању без губитка континуитета. Део тога материјала се обрађује у предмету Практикум из Основа електротехнике 1. Означени материјал омогућава заинтересованом читаоцу проширивање знања из одговарајућих области.

Аутор се посебно захваљује свом дугогодишњем сараднику и прегаоцу на предмету Основи електротехнике, мр инж. Градимиру Божиловићу, на великој помоћи и подршци током израде овог уџбеника. Аутор се такође захваљује својим блиским сарадницима, професору др инж. Бранку Колунџији, ванредном професору др инж. Владимиру Петровићу, доценту др инж. Дејану Тошићу и асистенту-приправнику мр инж. Драгану Олћану, на корисним сугестијама и примедбама, као и студентима Милици Ђурић и Немањи Огњановићу, који су помогли у припреми и техничкој обради рукописа.

Београд, марта 2006. Аутор

Предговор четвртом издању

У овом издању су исправљене уочене грешке. Аутор се захваљује асистенту Слободану Савићу који је детаљно прочитао уџбеник и указао на неке од тих грешака.

Београд, септембра 2012. Аутор

Садржај

Страна
1. Електростатика ... 1
1.1. Увод ... 1
1.2. Наелектрисање ... 2
1.3. Електростатичко поље ... 4
1.4. Кулонов закон ... 5
Координатни системи ... 12
1.5. Вектор јачине електричног поља ... 17
1.5.1. Расподеле наелектрисања ... 21
Просторна расподела наелектрисања ... 21
Површинска расподела наелектрисања ... 25
Линијска расподела наелектрисања ... 32
1.5.2. Одређивање електричног поља расподељених наелектрисања ... 35
Електрично поље просторног наелектрисања ... 35
Електрично поље површинског наелектрисања ... 36
Електрично поље линијског наелектрисања ... 36
Примери ... 37
1.6. Потенцијал ... 44
1.6.1. Напон ... 55
1.6.2. Еквипотенцијалне површи и линије електричног поља ... 57
1.6.3. Одређивање вектора јачине електричног поља из потенцијала ... 58
1.6.4. Електростатички дипол ... 61
1.7. Гаусов закон ... 63
1.7.1. Одређивање електричног поља помоћу Гаусовог закона ... 71
Сферна геометрија ... 72
Цилиндрична геометрија ... 77
Раванска геометрија ... 81
1.7.2. Једнодимензиони диференцијални облик Гаусовог закона ... 88
1.7.3. Пуасонова и Лапласова једначина ... 90
1.8. Проводници у електростатичком пољу ... 91
1.8.1. Проводници ... 92
1.8.2. Електростатичка индукција ... 94
1.8.3. Гранични услови ... 95
1.8.4. Расподела наелектрисања на проводним телима ... 98
1.8.5. Теорема ликова ... 105
1.8.6. Капацитивности ... 108
Капацитивност усамљеног проводног тела ... 108
Кондензатор и његова капацитивност ... 109
1.9. Електростатичко поље у присуству диелектрика ... 119
1.9.1. Поларизација диелектрика ... 119

Вектор поларизације 124
Померај наелектрисања у процесу поларизације и везано наелектрисање 126
1.9.2. Уопштени Гаусов закон 134
Гранични услови 139
1.9.3. Анализа поља у системима са диелектрицима 142
Линеаран хомоген диелектрик 143
Линеаран нехомоген диелектрик 144
Нелинеаран диелектрик 150
1.10. Рад електричних сила и енергија електростатичког поља 153
1.10.1. Одређивање електричних сила 158
Литература 166

1. Електростатика

1.1. Увод

Циљ Основа електротехнике је да читаоцу пружи основна знања из електромагнетских поља и електричних кола тако да, користећи се тим знањима, успешно решава проблеме на које ће наићи у другим предметима електротехничке струке и у пракси. Разматрања полазе од основних физичких закона до којих се дошло на основу неколико фундаменталних експеримената. Излагања су на нивоу и у обиму који је прилагођен потребама електротехничке инжењерске праксе.

Градиво Основа електротехнике је подељено у четири целине, у којима се прожимају анализа поља и анализа кола. Према тим целинама је и уџбеник подељен у четири дела (поглавља).

Први део односи се на електростатичко поље. У излагању се полази од Кулоновог закона, изводе се основне једначине електростатичког поља у вакууму, а затим се решавају проблеми поља у присуству проводника и изолатора. Анализира се кондензатор као један од основних елемената електричних кола, а на крају се разматра енергија електростатичког поља. Анализа електростатичког поља је од непосредног значаја за неке области електротехнике, као што су физика чврстог стања, техника високог напона и електроника. Осим тога, она је неопходан увод у анализу струјног поља, али и важан алат за анализу водова у микроталасној техници.

Други део обухвата анализу поља сталних струја, одакле се изводе основне поставке анализе електричних кола. Уводе се отпорници и генератори као основни елементи кола, а из једначина поља се изводе основни закони електричних кола (Кирхофови закони и Омов закон). На основу тога се формирају методи решавања сложених кола. Ти методи имају директну примену у решавању разних практичних проблема у електротехници, посебно у електроници, а представљају неопходан основ за четврти део уџбеника.

У трећем делу разматра се магнетско поље, и то најпре стално магнетско поље, а затим променљиво електромагнетско поље и електромагнетска индукција. Посматра се калем као још један основни елемент електричних кола. Анализа поља долази до нивоа општих једначина макроскопских електромагнетских поља (Максвелових једначина) у интегралном облику. Магнетско поље је од суштинске важности за електроенергетику јер се рад свих електричних машина заснива на магнетским пољима и електромагнетској индукцији. Разматрање променљивих електромагнетских поља је увод у анализу електромагнетских таласа, на којима почивају телекомуникације, од преноса сигнала водовима и светловодима, преко сателитских веза, до бежичних рачунарских мрежа.

У четвртом делу разматрају се електрична кола променљивих струја, са посебним нагласком на кола простопериодичних (синусоидалних, наизменичних) струја. Уводе се основни методи решавања кола променљивих струја. Ти методи и њихова надградња су основни алати за решавање проблема у електроенергетици, електроници (укључујући и рачунарски хардвер) и телекомуникацијама, а воде и до општих метода анализе сигнала и система.

1.2. Наелектрисање

У Основима електротехнике се бавимо макроскопском теоријом електромагнетских поља. Не разматрамо појаве везане за микросвет (као што су елементарне честице, квантни ефекти, структура атома и молекула и јединствена теорија физичких поља). Осим када будемо разматрали понашање материјала у електричним и магнетским пољима, најситнији елемент који посматрамо је физички мала запремина. То је запремина довољно мала да је са наше (макроскопске) тачке гледишта можемо у анализи заменити математички малом запремином. Са друге стране, физички мала запремина је довољно велика да не залази у микросвет, већ обухвата довољно велики број атома и молекула да се могу применити статистички закони (на пример, да се у таквој запремини могу посматрати средње вредности).

Сваки предмет око нас (на пример, метална лопта или цилиндар од изолационог материјала) састоји се од огромног броја атома, односно молекула. У неутралном стању, сваки молекул има исти број протона и електрона. Наелектрисање[1] једног протона се назива елементарним наелектрисањем и износи[2] $e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, док је наелектрисање електрона једнако по апсолутној вредности, али је супротног знака ($-e$). Стога је укупно наелектрисање неутралног молекула једнако нули. Ако је сваки молекул неутралан, и цело тело је електрички неутрално.

Ако број електрона тела није једнак броју протона, за тело се каже да је наелектрисано. Као примере поступака који доводе до наелектрисавања тела, наводимо додиривање различитих материјала (које се поспешује механичким трењем), загревање,

[1] Физичка суштина наелектрисања до данас није позната, већ се знају само неке појавне стране. Стога полазимо од наелектрисања као појма који се не дефинише, слично као што се у математици не дефинишу скуп, тачка, права и раван.

[2] У електротехници се искључиво употребљава SI систем јединица, у коме је јединица наелектрисања кулон (C).

бомбардовање брзим честицама, а неки материјали се могу наелектрисати под дејством светлости. При наелектрисавању се најчешће на тело доводе електрони или се са тела електрони одводе, чиме се мења укупан број електрона тела. У ситуацијама које су ређе у пракси, мења се број протона.

Означимо укупан број протона посматраног тела са n_p, а број електрона са n_e. Наелектрисање тела је $Q = \left(n_\mathrm{p} - n_\mathrm{e}\right)e$. Ако тело има мањак електрона у односу на број протона ($n_\mathrm{e} < n_\mathrm{p}$), тело је, у целини гледано, позитивно наелектрисано. Ако постоји вишак електрона ($n_\mathrm{e} > n_\mathrm{p}$), тело је негативно наелектрисано. Тело је електрички неутрално ако је $n_\mathrm{e} = n_\mathrm{p}$.

Концентрација протона и електрона код чврстих тела је веома велика, реда величине[3] $10^{30}\ \mathrm{m}^{-3} = 10^{24}\mathrm{cm}^{-3}$. Укупно позитивно наелектрисање свих протона је огромно. Подељено масом тела, то наелектрисање је реда величине $10^8\ \mathrm{C/kg}$. Ако је тело неутрално, (негативно) наелектрисање свих електрона у телу је по модулу једнако укупном наелектрисању свих протона.

Насупрот томе, вишак наелектрисања (који смо означили са *Q*), остварљив на наелектрисаним телима у практичним условима, релативно је мали и ретко достиже $1\,\mathrm{C}$. На пример, наелектрисање једне електроде кондензатора капацитивности $C = 10\ \mathrm{mF}$, који је под напоном $U = 100\ \mathrm{V}$, износи[4] $Q = CU = 1\,\mathrm{C}$ (наелектрисање друге електроде је једнако $-Q$). На предметима који су у нашој употреби (лист папира, чешаљ), највеће наелектрисање је реда величине испод $1\,\mu\mathrm{C}$, а ограничено је пробојем околног диелектрика. (Електрично поље у ваздуху при коме долази до пробоја је, под нормалним околностима, око $E_\mathrm{kr} = 3\ \mathrm{MV/m}$.)

Пример. Израчунајмо укупно наелектрисање свих протона пуне бакарне лопте полупречника $a = 100\ \mathrm{mm}$. Специфична маса (густина) бакра је $\rho_\mathrm{m} = 8{,}933\ \mathrm{g/cm}^3 = 8{,}933 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m}^3$, па је маса лопте $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_\mathrm{m} = 37{,}4\ \mathrm{kg}$. На основу података из периодног система хемијских елемената, број протона у атому бакра (атомски број) је $Z = 29$, а релативна атомска маса је $A_\mathrm{r} = 63{,}546$. Просечна маса атома

---

[3] „Реда величине *a*“ значи да се посматрана величина налази у границама између $a/\sqrt{10}$ и $a\sqrt{10}$, где је *a* обично декадни умножак основне јединице. У другачијој интерпретацији, „реда величине *a*“ значи да је средња вредност посматране величине приближно једнака *a*, при чему се не разматра колико је одступање од средње вредности.

[4] По договору, скаларне физичке величине (на пример, капацитивност, *C*) и математичке варијабле (рецимо, итератор *i* у изразу $i = 1,\ldots,N$) пишу се косим словима (италиком). Константе (имагинарна јединица, j, основа природних логаритама, e), функције (sin), јединице физичких величина (кулон, C) и описни индекси (p у n_p) пишу се обичним, усправним словима. Вектори и матрице се у штампаном слогу пишу масним (болд) словима (на пример, вектор брзине, **v**). У руком писаном тексту вектори се обележавају стрелицом изнад одговарајућег симбола ($\vec{v}$).

бакра је $m_{\mathrm{Cu}} = A_{\mathrm{r}} u = 1{,}055 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$, где је $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ атомска јединица масе. У посматраној лопти има $n = \dfrac{m}{m_{\mathrm{Cu}}} = 3{,}55 \cdot 10^{26}$ атома бакра, односно $n_{\mathrm{p}} = Zn = 1{,}03 \cdot 10^{28}$ протона. (Ако је лопта електрички неутрална, број електрона лопте је $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{p}}$.) Наелектрисање свих протона је $Q_{\mathrm{p}} = en_{\mathrm{p}} = eZn = 1{,}65 \cdot 10^{9}\ \mathrm{C} = 1{,}65\ \mathrm{GC}$ (што одговара $44\ \mathrm{MC/kg}$)[5]. Јачина електричног поља на површи лопте дата је изразом $|\mathbf{E}| = \dfrac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ (видети одељак 1.7), где је Q наелектрисање лопте, а $\varepsilon_0 \approx 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ пермитивност вакуума. Ако се лопта налази у ваздуху у коме долази до пробоја при пољу јачине $E_{\mathrm{kr}} = 3\ \mathrm{MV/m}$, онда је највеће (по апсолутној вредности) наелектрисање лопте $|Q|_{\max} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E_{\mathrm{kr}} = 3{,}34\ \mu\mathrm{C} = 2 \cdot 10^{-15}\, Q_{\mathrm{p}}$. Да би се остварило наелектрисање лопте $Q = |Q|_{\max} = 3{,}34\ \mu\mathrm{C}$, са лопте се мора одвести $\dfrac{Q}{e} = 2{,}1 \cdot 10^{13}$ електрона (што је у просеку приближно један електрон на сваких $5 \cdot 10^{14}$ електрона). Да би се остварило наелектрисање $Q = -|Q|_{\max} = -3{,}34\ \mu\mathrm{C}$, мора се довести $2{,}1 \cdot 10^{13}$ електрона. ◙

Из ових примера се види да је вишак наелектрисања тела, по апсолутној вредности, много редова величине мањи од укупног позитивног наелектрисања тела. Само веома мали број електрона учествује у стварању вишка (односно мањка) наелектрисања.

1.3. Електростатичко поље

Ако се неко тело наелектрише и остави да мирује у односу на посматрача, при чему му је наелектрисање константно (не зависи од времена), онда се физичке појаве везане за такав систем разматрају у оквиру електростатике. У простору у околини наелектрисаног тела постоји електростатичко (електрично) поље[6]. Суштина физичког поља није до данас разјашњена, па се поље само описује као „посебно физичко стање материје“, које се испољава на одређени начин. Стога и за електростатичко поље само кажемо да је у питању посебно физичко стање.

[5] Префикс G значи 10^{9}. У овом уџбенику употребљаваћемо само „инжењерске“ префиксе: m (мили, 10^{-3}), μ (микро, 10^{-6}), n (нано, 10^{-9}), p (пико, 10^{-12}) и f (фемто, 10^{-15}), односно k (кило, 10^{3}), M (мега, 10^{6}), G (гига, 10^{9}) и T (тера, 10^{12}).

[6] У математици се под пољем подразумева простор у коме је дефинисана векторска или скаларна функција.