Predgovor

Ovaj udžbenik prvenstveno je namenjen studentima Računarskog fakulteta, ali ga mogu koristiti i studenti ostalih fakulteta na kojima se obrađuju ove teme.

Gradivo je podeljeno u devet oblasti:

(1) Funkcije više promenljivih. Metrički prostori
(2) Diferencijabilnost funkcija više promenljivih
(3) Krivolinijski integrali
(4) Višestruki integrali
(5) Površinski integrali
(6) Teorija polja
(7) Furijeovi redovi i Furijeove transformacije
(8) Kompleksna analiza
(9) Laplasove transformacije.

Zbog obimnosti materije, ovde su dati samo osnovni koncepti oblasti koje su obrađene, što podrazumeva minimalan broj definicija, lema, stavova, teorema i posledica. Većina teorema je dokazana, a one koje nisu ili prevazilaze granice kursa ili su ostavljene čitaocu za vežbu. Radi lakšeg razumevanja gradiva dato je 50 skica i 155 primera. Udžbenik prati zbirka zadataka istog autora u kojoj je izloženo više od 420 zadataka (urađenih, sa uputstvom i glavnim međurezultatima ili samo rezultatima).

Na početku svakog poglavlja dat je pregled oblasti, sa naročitim osvrtom na računarstvo, u kojima se primenjuju pojmovi koji će se u tom poglavlju obrađivati, što je studentima posebno interesantno.

Tekst je rađen u programu *TeXstudio*.

Skice su rađene u programu *GeoGebra*.

Veliku zahvalnost dugujem dr Stojanu Radenoviću, dr Bobanu Marinkoviću, dr Neveni Marić i dr Draganu Šaletiću na pažljivom čitanju i nizu korisnih sugestija koje su doprinele kvalitetu ovog udžbenika.

Autor

U Beogradu, jun 2024

Sadržaj

Poglavlje 1. Funkcije više promenljivih. Metrički prostori 5
1. Uvod 5
2. Geometrijska interpretacija 9
3. Otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$ 16
4. Konvergencija u $\mathbb{R}^n$ 22
5. Kompletnost 27
6. Neprekidnost 29
7. Kompaktnost 31
8. Koneksnost 35

Poglavlje 2. Diferencijalni račun funkcija više promenljivih 37
1. Uvod 37
2. Parcijalni izvodi i diferencijabilnost funkcija više promenljivih 37
3. Izvod u pravcu. Gradijent 42
4. Diferencijabilnost vektorskih funkcija 45
5. Pravila diferenciranja 49
6. Teorema o srednjoj vrednosti 51
7. Geometrijska interpretacija totalnog diferencijala 53
8. Parcijalni izvodi višeg reda 55
9. Tejlorova formula 57
10. Lokalni ekstremumi 60
11. Implicitne funkcije 71
12. Implicitne funkcije sa vektorskim vrednostima 74
13. Uslovni ekstremumi 77

Poglavlje 3. Krivolinijski integrali 87
1. Uvod 87
2. Krivolinijski integrali prve vrste 89
3. Krivolinijski integrali druge vrste 95

Poglavlje 4. Višestruki integrali 105
1. Uvod 105
2. Pojam višestrukih integrala 105
3. Dvojni integrali 110
4. Trojni integrali 120
5. Smena promenljivih u višestrukim integralima 121
6. Grin-Rimanova teorema 129

Poglavlje 5. Površinski integrali 135
1. Uvod 135
2. Orijentacija površi u prostoru 136
3. Površinski integrali prve vrste 138
4. Površinski integrali druge vrste 141
5. Stoksova formula. Formula Gausa-Ostrogradskog 145

Poglavlje 6. Teorija polja 151
1. Uvod 151
2. Skalarno polje 152
3. Vektorsko polje 153
4. Rotor i divergencija polja 155
5. Klasifikacija vektorskih polja 158

Poglavlje 7. Furijeovi redovi 161
1. Uvod 161
2. Ortonormirani sistemi i Furijeovi redovi 163
3. Konvergencija Furijeovog reda 170
4. Furijeova transformacija 173

Poglavlje 8. Kompleksna analiza 177
1. Uvod 177
2. Pojam kompleksnog broja 178
3. Pojam funkcije kompleksne promenljive 181
4. Diferencijabilnost funkcija kompleksne promenljive 183
5. Elementarne funkcije 189
6. Pojam integrala kompleksne funkcije 191
7. Košijeva integralna formula 196
8. Potencijalni redovi 200
9. Singulariteti uniformnih analitičkih funkcija 205
10. Teorija ostatka 207

Poglavlje 9. Laplasove transformacije 211
1. Uvod 211
2. Pojam Laplasove transformacije 212
3. Svojstva Laplasove transformacije 214
4. Inverzna Laplasova transformacija 223
5. Primena Laplasove transformacija 229

Literatura 233

POGLAVLJE 1

Funkcije više promenljivih. Metrički prostori

1. Uvod

Mnogi realni problemi ne mogu se modelovati funkcijama jedne promenljive. Zbog toga se funkcije više promenljivih koriste u mnogim oblastima, uključujući i računarstvo. Neke od oblasti računarstva gde su one posebno važne su:

-mašinsko učenje i veštačka inteligencija (treniranje modela mašinskog učenja uključuje optimizaciju funkcije gubitka, koja je funkcija više promenljivih -parametara modela);

-računarska grafika (površine objekata u $3D$ prostoru su definisane funkcijama više promenljivih, na osnovu kojih se rade simulacije osvetljenja, senčenja i drugih efekata);

-simulacije i analize (simulacije fluida, deformacija materijala i drugih fizičkih procesa koriste funkcije više promenljivih za modelovanje stanja sistema u različitim tačkama prostora i vremena, potom *Monte Carlo* simulacije koje se oslanjaju na slučajne procese);

-računarska geometrija (algoritmi za obradu slike - filtriranje, transformacije i druge operacije na slikama koriste funkcije više promenljivih, a koriste ih i geometrijski algoritmi - na primer, algoritmi za pretragu najkraće putanje i detekciju kolizija koriste funkcije koje zavise od više promenljivih);

- analiza podataka (višedimenzionalna statistika - analiza podataka sa više atributa koristi funkcije više promenljivih za modelovanje odnosa među podacima);

- optimizacija (linearno i nelinearno programiranje koriste funkcije više promenljivih za rešavanje problema optimizacije u različitim domenima, a koriste ih i heurističke metode - algoritmi kao što su genetski algoritmi, optimizacija roja pčela itd.);

-kontrola i robotika (modelovaje i kontrola robotskih sistema često uključuje funkcije više promenljivih za određivanje putanja, brzina i drugih parametara; algoritmi za planiranje pokreta koriste funkcije više promenljivih za određivanje optimalnih putanja u složenim okruženjima).

Ove primene pokazuju koliko su funkcije više promenljivih široko rasprostranjene i koliko su važne u savremenom računarstvu.

Primer 1.1 Ukoliko je potrebno izračunati površinu pravougaonog dvorišta, onda je jasno je da imamo dva ulazna podatka: dužinu i širinu dvorišta. Ako dužinu označimo sa a, a širinu sa b, onda se površina P, zavisna od dva ulazna podatka, izračunava formulom $P = a \cdot b$. Dakle, površina P je funkcija dve nezavisno promenljive (jer dužina ni na koji način ne zavisi od širine), tj. $P = P(a, b)$. U ovom slučaju možemo reći da je P funkcija koja skup $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ preslikava u skup $\mathbb{R}_+$, gde smo sa $\mathbb{R}_+$ označili skup pozitivnih realnih brojeva, odnosno $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$. □

Primer 1.2 Pretpostavimo da je potrebno izračunati zapreminu kutije u obliku kvadra. Jasno je da nam je za to potrebno tri ulazna podatka: dužina, širina i visina kutije. Ako dužinu označimo sa a, širinu sa b i visinu sa c, onda se zapremina V, zavisna od tri ulazna podatka, izračunava formulom $V = a \cdot b \cdot c$. Dakle, zapremina V je funkcija tri nezavisno promenljive (jer dužina ni na koji način ne zavisi od širine i visine), tj. $V = V(a, b, c)$. U ovom slučaju možemo reći da je V funkcija koja skup $\mathbb{R}^3_+$ preslikava u skup $\mathbb{R}_+$, odnosno $V : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$, $(a, b, c) \mapsto a \cdot b \cdot c$. □

Primer 1.3 Sledeći primeri su takođe primeri funkcija više promenljivih.

(1) Sabiranje dva realna broja je funkcija $(x, y) \mapsto x+y$, gde su $x, y \in \mathbb{R}$ i $x + y \in \mathbb{R}$, pa ova funkcija preslikava skup $\mathbb{R}^2$ u skup $\mathbb{R}$.
(2) $(x, y) \mapsto \frac{1}{x-y}$, gde su $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ i $\frac{1}{x-y} \in \mathbb{R}$, pa ova funkcija preslikava skup $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \neq y\}$ u skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(3) $(x, y, z) \mapsto \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}$, gde su $x, y, z \in \mathbb{R}$, pa ova funkcija preslikava skup $\mathbb{R}^3$ u skup $\mathbb{R}$.
(4) $(x, y) \mapsto x$, gde su $x, y \in \mathbb{R}$, pa ova funkcija preslikava skup $\mathbb{R}^2$ u skup $\mathbb{R}$ i naziva se prva projekcija $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}$.
(5) $(x, y) \mapsto y$, gde su $x, y \in \mathbb{R}$, pa ova funkcija preslikava skup $\mathbb{R}^2$ u skup $\mathbb{R}$ i naziva se druga projekcija $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}$.
(6) $(x, y, z) \mapsto x$, gde su $x, y, z \in \mathbb{R}$, pa ova funkcija preslikava skup $\mathbb{R}^3$ u skup $\mathbb{R}$ i naziva se prva projekcija $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}$.
(7) $(x, y, z) \mapsto y$, gde su $x, y, z \in \mathbb{R}$, pa ova funkcija preslikava skup $\mathbb{R}^3$ u skup $\mathbb{R}$ i naziva se druga projekcija $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}$.
(8) $(x, y, z) \mapsto z$, gde su $x, y, z \in \mathbb{R}$, pa ova funkcija preslikava skup $\mathbb{R}^3$ u skup $\mathbb{R}$ i naziva se treća projekcija $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}$.

□

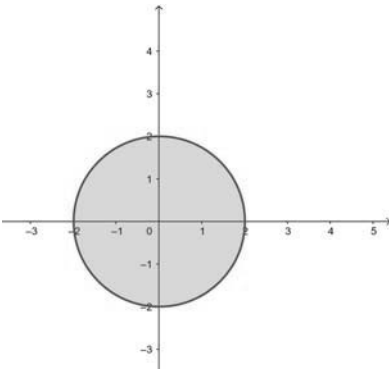
Definicija 1.1. *Funkcija f iz skupa A u skup B, u oznaci $f : A \to B$, $y = f(X)$, je preslikavanje kojim jednom elementu X iz skupa A odgovara tačno jedan element y iz skupa B. Skup A je skup svih onih X za koje je $f(X)$ definisano i naziva se domen, dok se skup B naziva kodomen funkcije f.* □

Dakle, u slučaju funkcije $(x, y) \mapsto x + y$, gde su $x, y \in \mathbb{R}$ i $x + y \in \mathbb{R}$, zaključujemo da ova funkcija preslikava skup $A = \mathbb{R}^2$ u skup $B = \mathbb{R}$ i kažemo da je ovo funkcija dve promenljive (x i y). Slično, u slučaju funkcije $(x, y, z) \mapsto \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}$, nije teško zaključiti da je $A = \mathbb{R}^3$ i $B = \mathbb{R}$, pa za ovu funkciju kažemo da je funkcija tri promenljive (x, y i z).

Primedba 1. *Ukoliko je skup B skup realnih brojeva ili njegov podskup, onda kažemo da je funkcija realna. Ako je, pak, skup B skup kompleksnih brojeva ili njegov podskup, onda kažemo da je funkcija kompleksna.* □

Primer 1.4 Domen funkcije $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ je skup D (Slika 1.1)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

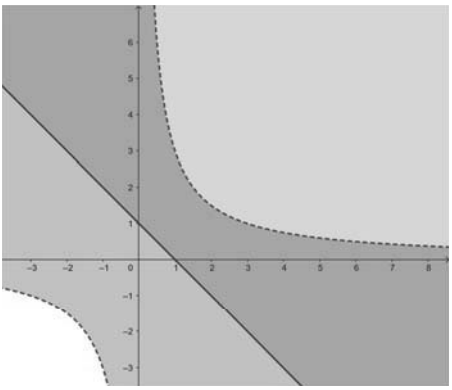


Slika 1.1

□

Primer 1.5 Domen funkcije $f(x, y) = ln(3 - xy) + \sqrt{x + y - 1}$ je skup D (Slika 1.2)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, xy < 3 \wedge y \geq 1 - x\}.$$

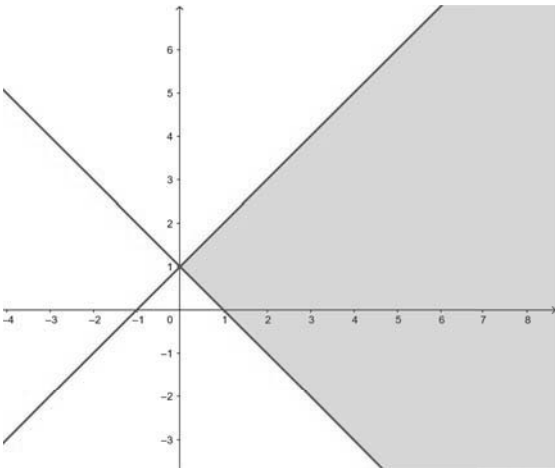


Slika 1.2

□

Primer 1.6 Domen funkcije $f(x,y) = ln(x - \sqrt{(y-1)^2})$ je skup D (Slika 1.3)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, |y-1| < x\}.$$

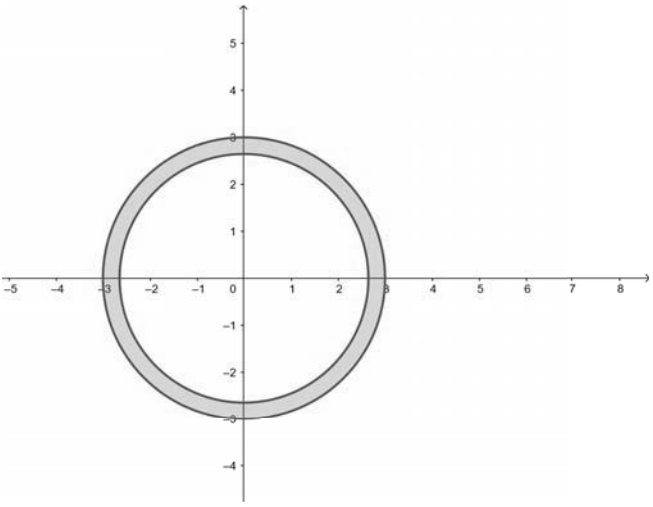


Slika 1.3

□

Primer 1.7 Domen funkcije $f(x,y) = arcsin(8 - x^2 - y^2)$ je skup D (Slika 1.4)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 7 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

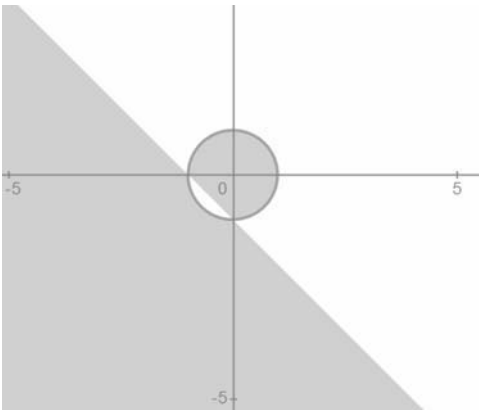


Slika 1.4

□

Primer 1.8 Domen funkcije $f(x,y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x+y}}$ je skup (Slika 1.5)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, (x^2+y^2 \leq 1 \wedge y > -1-x) \vee (x^2+y^2 \geq 1 \wedge y < -1-x)\}.$



Slika 1.5

□

2. Geometrijska interpretacija

Definicija 1.2. Grafik funkcije *$f : A \to B$, $y = f(X)$ je skup svih tačaka $(X, f(X))$ za $X \in A$, a koji najćešće označavamo sa G. Dakle,*

$$G = \{(X, f(X)) | \, X \in A\}.$$

□

Primedba 2. *U slučaju kada je skup A podskup skupa $\mathbb{R}^2$, onda često $f(x,y)$ označavamo sa z, pa je grafik*

$$G = \{(x,y,z) | \, (x,y) \in A \wedge z = f(x,y)\},$$

odakle sledi da je grafik funkcije dve promenljive zapravo površ u prostoru.□

Skiciranje grafika funkcija dve promenljive značajno je složenije nego što je to slučaj sa funkcijama jedne promenljive.

Za skiciranje grafika funkcija dve promenljive koristimo projekcije grafika na koordinatne ravni. Projekcija grafika funkcije f na xOy-ravan je skup svih rešenja jednačine $f(x,y) = 0$, pa je to zapravo grafik funkcije jedne promenljive. Projekcija grafika funkcije f na xOz-ravan je skup svih rešenja jednačine $f(x,0) = z$, pa je i to grafik funkcije jedne promenljive. Slično,

projekcija grafika funkcije f na yOz-ravan je skup svih rešenja jednačine $f(0, y) = z$, a i to je grafik funkcije jedne promenljive.

Osim ovih projekcija, za skiciranje grafika funkcija dve promenljive veoma su značajne nivo-linije.

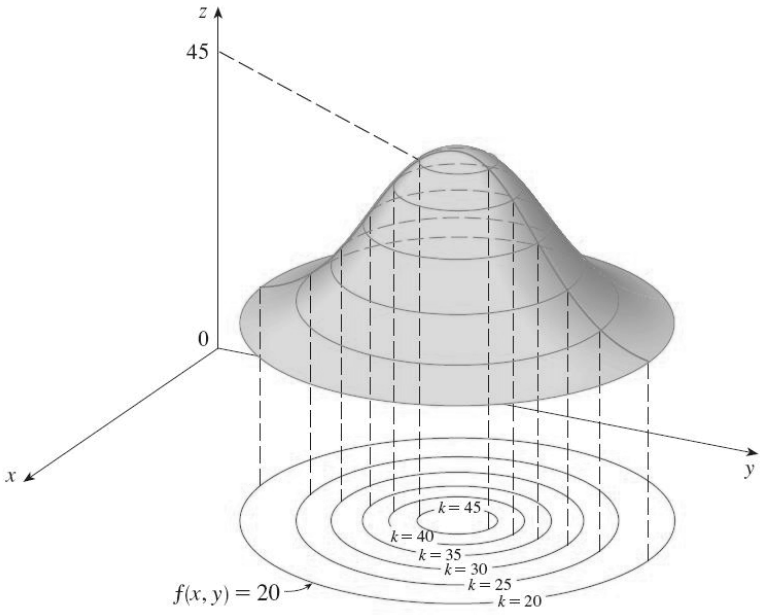
Definicija 1.3. *Neka je data funkcija* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$. **Nivo linija** *funkcije* f *je skup svih tačaka iz domena za koje funkcija* f *ima istu vrednost* z_0*, odnosno nivo linija funkcije* f *je sledeći skup tačaka*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, f(x, y) = z_0\}.$$

□

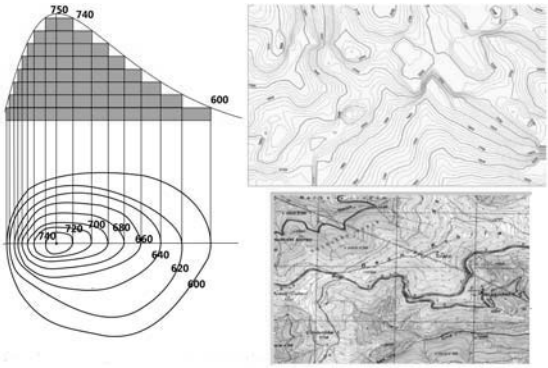
Primedba 3. *Nivo linija je projekcija preseka površi* $z = f(x, y)$ *i ravni* $z = z_0$ *na* xOy*-ravan.* □

Skup nivo linija za više različitih konstantnih vrednosti $z_i, i \in I \subset \mathbb{N}$ čini mrežu nivo linija funkcije $z = f(x, y)$. Kažemo da je mreža ravnomerna ako se bira da je $z = k \cdot h$, $0 < h \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}$ (Slika 1.6).



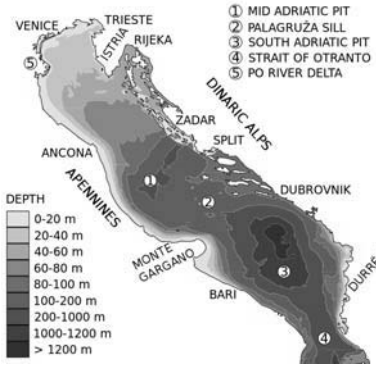
Slika 1.6

Neke ravnomerne mreže imaju svoje nazive i često se koriste u raznim naukama. Na primer:
-*izohipse* su linije na istoj nadmorskoj visini (Slika 1.7);



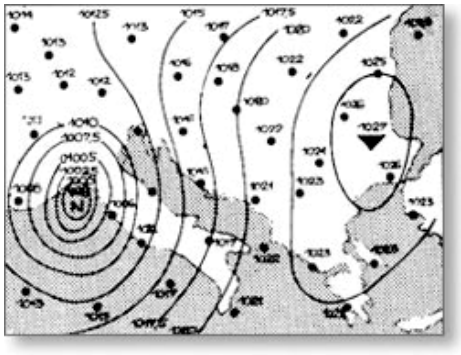
Slika 1.7[1]

- *izobate* su linije na vodenim površinama na istoj dubini (Slika 1.8);



Slika 1.8[2]

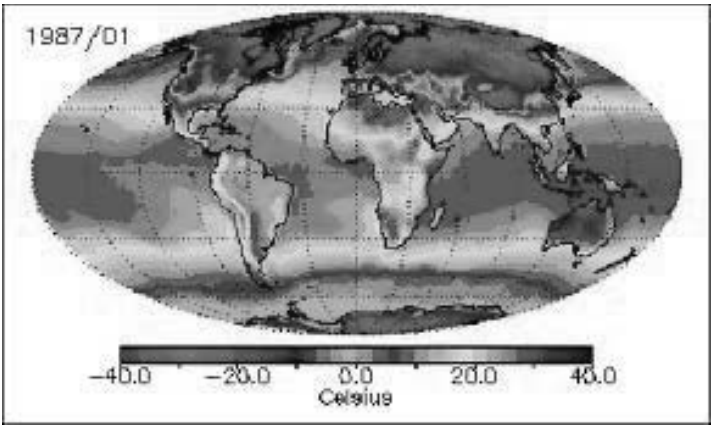
- *izobare* su linije koje označavaju isti atmosferski pritisak (Slika 1.9);



Slika 1.9 [3]

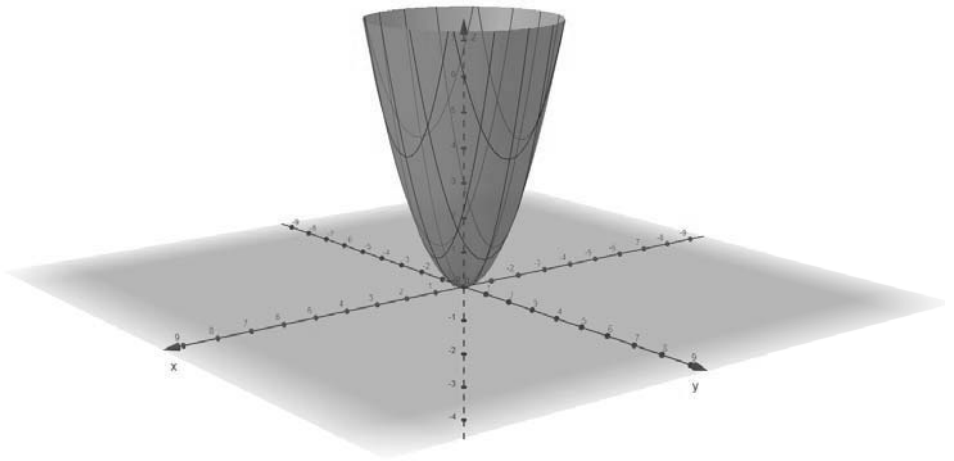
[1]preuzeto sa https://geografijazatebe.wordpress.com/takmicenje/metod-izohipsi/
[2]preuzeto sa https://sh.wikipedia.org/wiki/Jadransko more
[3]preuzeto sa https://www.meteologos.rs/analiza-vremena

- *izoterme* su linije koje označavaju istu temperaturu (Slika 1.10).



Slika 1.10[4]

Primer 1.9 Funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$ ima grafik prikazan na Slici 1.11. Taj grafik nazivamo **kružni rotacioni paraboloid**. Naziv potiče otuda što ravni paralelne sa xOz i yOz ravnima seku ovu površ po parabolama.

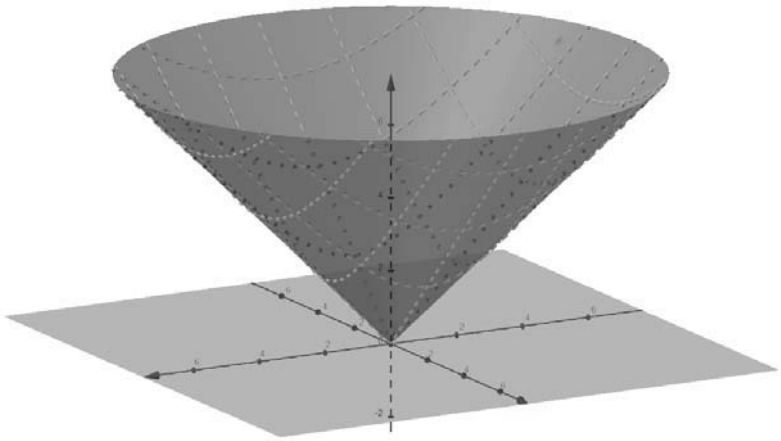


Slika 1.11

□

[4]preuzeto sa http://crazycandy.blog.rs/blog/crazycandy/geografija

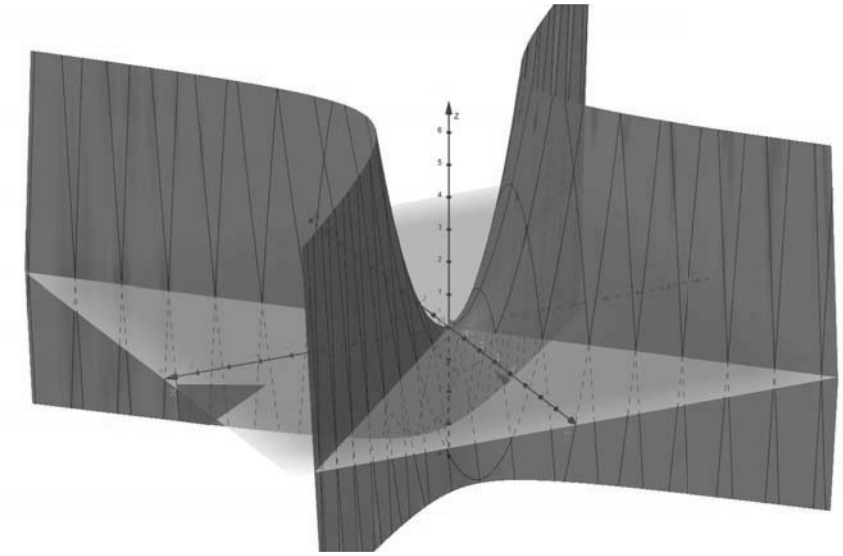
Primer 1.10 Funkcija $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ima grafik prikazan na Slici 1.12. Taj grafik nazivamo **kružni konus**.



Slika 1.12

□

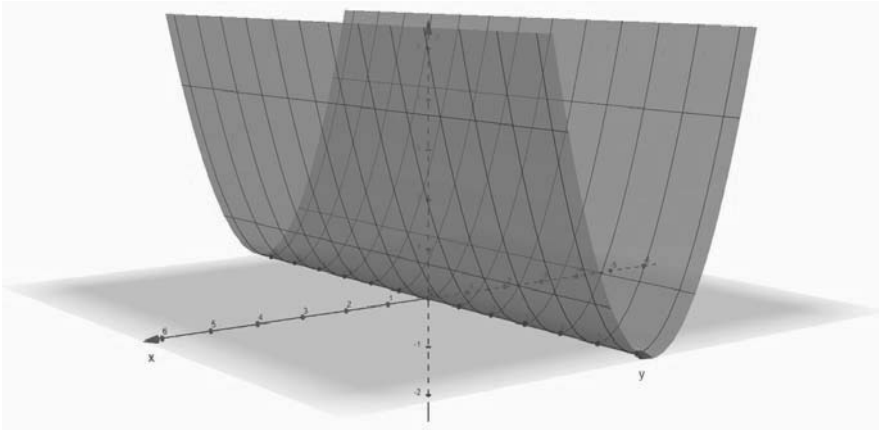
Primer 1.11 Funkcija $f(x,y) = x^2 - y^2$ ima grafik prikazan na Slici 1.13. Taj grafik nazivamo **sedlasta površ**.



Slika 1.13

□

Primer 1.12 Funkcija $f(x, y) = x^2$ ima grafik prikazan na Slici 1.14. Taj grafik nazivamo **parabolički cilindar**.



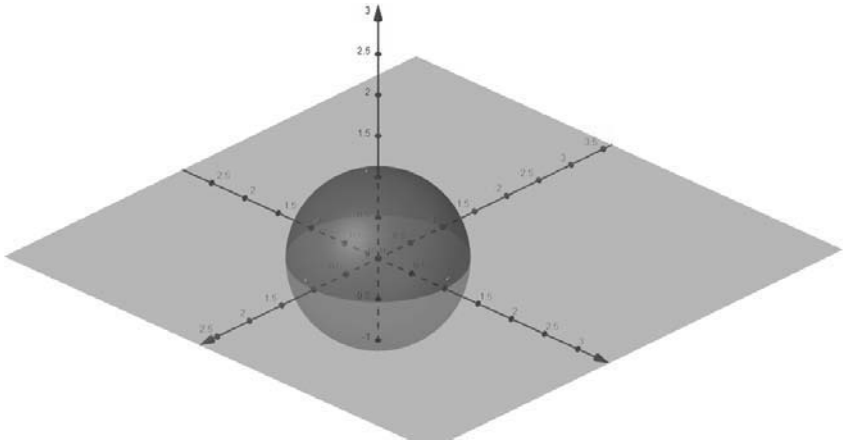
Slika 1.14

□

Svi prethodni primeri bili su za slučaj kada smo funkciju predstavljali u eksplicitnom obliku. Podsetimo se da za $f : A \to B$, $y = f(X)$, $X \in A$, kažemo da je zadata eksplicitno. Osim toga, funkcija može biti zadata i implicitno sa $F(X, y) = 0$. Primer implicitno zadate funkcije jedne promenljive je $\sin y + \sin x + xy = 0$.

Primedba 4. *Poznato je da je* $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$ *jednačina kružnice u* $\mathbb{R}^2$*, gde je* r *poluprečnik. Napomenimo da je ovde* x *nezavisno promenljiva, dok je* y *zavisno promenljiva, kao i da jednačina kružnice nije funkcija (jer za jedno* x *mogu postojati dva različita* y*). Slično važi i za slučaj kada imamo dve ili više nezavisno promenljivih.* □

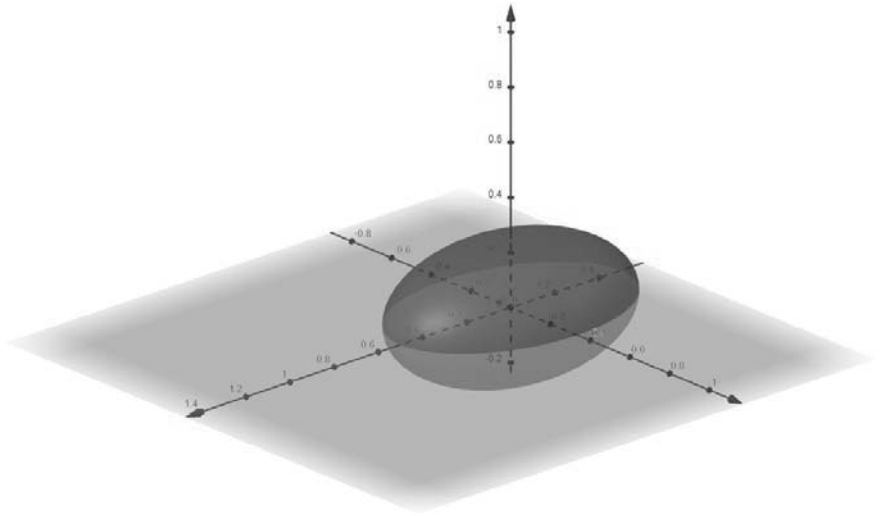
Primer 1.13 Jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ definisana je površ u prostoru (Slika 1.15) koju nazivamo **sfera** sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom $r = 1$.



Slika 1.15

□

Primer 1.14 Jednačinom $4x^2+9y^2+16z^2 = 1$ definisana je površ u prostoru (Slika 1.16) koju nazivamo **elipsoid** sa centrom u koordinatnom početku i osama $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ i $c = \frac{1}{4}$.



Slika 1.16

□

3. Otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$

Proučavajući funkcije jedne promenljive uveli smo pojam otvorenog intervala $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$. To je bilo dovoljno za definisanje okoline neke tačke na realnoj pravoj.

Sada se postavlja pitanje šta je okolina tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$. Podsetimo se da je u $\mathbb{R}^2$ jednačina kružnice sa centrom u tački $M_0(x_0, y_0)$ i poluprečnikom $r > 0$, koja se sastoji od tačaka $M(x, y)$, data sa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Krug je skup svih tačaka u ravni koje se nalaze unutar kružnice, pa je jednačina kruga u $\mathbb{R}^2$ sa centrom u tački $M_0(x_0, y_0)$ i poluprečnikom $r > 0$, koji se sastoji od tačaka $M(x, y)$, data sa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2.$$

Slično se ovi pojmovi definišu i u prostoru $\mathbb{R}^3$. Jednačina sfere sa centrom u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i poluprečnikom $r > 0$, koja se sastoji od tačaka $M(x, y, z)$, data je sa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Kugla je skup svih tačaka $M(x, y, z)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ koje se nalaze unutar sfere, pa je jednačina kugle u $\mathbb{R}^3$ sa centrom u tački $M_0(x_0, y_0.z_0)$ i poluprečnikom $r > 0$, koja se sastoji od tačaka $M(x, y, z)$, data sa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2.$$

Na potpuno isti način se definiše kugla u prostoru $\mathbb{R}^n$. Dakle, jednačina kugle u prostoru $\mathbb{R}^n$, a čiji je centar u tački $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ i poluprečnik $r > 0$, je skup svih tačaka $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ za koje važi:

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 < r^2.$$

Definicija 1.4. *Neka je X proizvoljan neprazan skup i neka je definisano preslikavanje $d : X \times X \to [0, \infty)$ koje ima sledeće osobine:*

(1) $(\forall x, y \in X) \quad d(x, y) \geq 0,$
(2) $(\forall x, y \in X) \quad d(x, y) = 0 \implies x = y,$
(3) $(\forall x, y, z \in X) \quad d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y).$

Za preslikavanje d kažemo da je **rastojanje** *ili* **metrika** *na skupu X. Par (X, d) nazivamo* **metrički prostor**. □

Primer 1.15 Par $(\mathbb{R}, d)$, gde je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva, a $d(x,y) = |x-y|$ je metrički prostor jer ovako definisana funkcija d zadovoljava uslove definicije 1.4. □

Primer 1.16 Neka je $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | \, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$. U ovom skupu smo definisali skalarni proizvod sa $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$. Normu smo definisali sa $||x|| = \sqrt{< x, x >}$, a rastojanje sa $d(x,y) = ||x-y||$. Nije teško proveriti da par $(\mathbb{R}^n, d)$ jeste metrički prostor jer ovako definisano rastojanje zadovoljava sve uslove definicije 1.4. □

Primer 1.17 Neka je X skup svih beskonačnih ograničenih nizova realnih brojeva, $x = x_i, i = 1, 2, 3, ...$ Neka je rastojanje d dato sa:

$$d(x,y) = \sup_{1 \le i < \infty} |x_i - y_i|.$$

Nije teško proveriti da par (X, d) jeste metrički prostor jer ovako definisano rastojanje zadovoljava sve uslove definicije 1.4. □

Definicija 1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor , $a \in X$ i r pozitivan realan broj.*

- **Otvorena kugla** *sa centrom u a i poluprečnikom r je skup*
$$K(a, r) = \{x \in X | d(x, a) < r\}.$$
- **Zatvorena kugla** *sa centrom u a i poluprečnikom r je skup*
$$K[a, r] = \{x \in X | d(x, a) \le r\}.$$
- **Sfera** *sa centrom u a i poluprečnikom r je skup*
$$S(a, r) = \{x \in X | d(x, a) = r\}.$$

□

Definicija 1.6. *Podskup metričkog prostora je* **ograničen** *ako je sadržan u nekoj kugli konačnog poluprečnika.* □

Definicija 1.7. *Podskup G metričkog prostora (X, d) je* **otvoren** *ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži neku otvorenu kuglu sa centrom u toj tački, tj.*

$$(\forall x \in G)(\exists \delta > 0) K(x, \delta) \subset G.$$

□

Primer 1.18

(1) U proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) ceo skup X i prazan skup su otvoreni skupovi.

(2) U proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) za $a \in X$ i $r > 0$ otvorena kugla $K(a, r)$ je otvoren skup. Zaista, neka je $x \in K(a, r)$. Tada je $d(x, a) < r$. Neka je $\delta = r - d(x, a) > 0$. Tada važi da je $K(x, \delta) \subset K(a, r)$ jer za $y \in K(x, \delta)$ imamo da je $d(x, y) < \delta$, a po nejednakosti trougla važi da je

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \delta = r.$$

(3) Slično se dokazuje i da je

$$\{x \in X | \, d(x, a) > r\}$$

otvoren skup.

□

Definicija 1.8. *Podskup F metričkog prostora (X, d) je* **zatvoren** *skup ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup.* □

Primer 1.19

(1) U proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) ceo skup X i prazan skup su zatvoreni skupovi.

(2) Neposredno iz definicije i prethodnog primera sledi da je, u proizvoljnom metričkom prostoru (X, d), za $a \in X$ i $r \in \mathbb{R}_+$ svaka zatvorena kugla oblika $K = \{x \in X | d(x, a) \leq r\}$ zatvoren skup. Nije teško videti i da je to tačno i za $r = 0$, kao i da je svaka tačka prostora (u smislu kada se razmatra kao jednočlan skup) takođe zatvoren skup.

□

Teorema 1.9.

(1) *Unija proizvoljno mnogo, kao i presek konačno mnogo otvorenih skupova su otvoreni skupovi.*

(2) *Presek proizvoljno mnogo, kao i unija konačno mnogo zatvornih skupova su zatvoreni skupovi.*

Dokaz.

(1) *Neka su $G_i, i \in I$, $I \subset N$ otvoreni skupovi i $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Neka je $x \in G$. To znači da postoji $i \in I$ takvo da $x \in G_i$. Skup G_i je otvoren skup, pa za neko $r > 0$ važi da $K(x, r) \subset G_i \subset G$, pa je G otvoren skup.*